Metallophysics and Advanced Technologies
Металофіз. новітні технол.
Metallofiz. Noveishie Tekhnol.
2019, vol. 41, No. 5, pp. 683–698
https://doi.org/10.15407/mfint.41.05.0683
Reprints available directly from the publisher

INTERACTIONS OF RADIATION AND PARTICLES WITH CONDENSED MATTER

PACS numbers: 03.50.De, 41.50.+h, 61.05.cc, 61.05.cf, 61.05.cm, 61.05.cp

Фундаментальная система уравнений для импульса и энергии электромагнитного поля в неоднородной среде. I. Фундаментальные уравнения в локальном базисе

А. А. Дышеков

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173,
360004 Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Российская Федерация

Развит новый формализм описания взаимодействия электромагнитного поля с кристаллом. Основными характеристиками предлагаемого подхода являются плотность энергии и импульс поля. Реакция среды на внешнее возмущение рассматривается как локальное изменение геометрии, которое заключается в повороте ортогонального базиса, построенного на векторах индукции и импульса поля. При этом геометрические характеристики определяются структурными параметрами среды. Получены фундаментальные уравнения в локальном базисе. Показано, что разделение волн на поляризации при рассмотрении задач рассеяния рентгеновской волны на кристалле не вполне корректно даже в случае идеального кристалла. Получены общие уравнения, которые позволяют рассчитывать импульс и энергию поля при его взаимодействии с кристаллом.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, электромагнитное поле, тензор Максвелла, канонический вид тензора поля.

Розвинуто новий формалізм опису взаємодії електромагнітного поля з кристалом. Основними характеристиками запропонованого підходу є густина енергії та імпульс поля. Реакція середовища на зовнішнє збурення

Corresponding author: Artur Albekovich Dyshekov
E-mail: dushekov@yandex.ru

Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky Str., 360004 Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russian Federation

Citation: A. A. Dyshekov, Fundamental System of Equations for Electromagnetic Field Momentum and Energy in an Inhomogeneous Medium. I. Fundamental Equations in Local Basis, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **41**, No. 5: 683–698 (2019) (in Russian), DOI: 10.15407/mfint.41.05.0683.

розглядається як локальна зміна геометрії, яка полягає у повороті ортогонального базису, побудованого на векторах індукції та імпульсу поля. При цьому геометричні характеристики визначаються структурними параметрами середовища. Отримано фундаментальні рівняння у локальному базисі. Показано, що розділення хвиль на поляризації при розгляді задач розсіяння рентґенівської хвилі на кристалі є не досить коректним навіть у випадку ідеального кристала. Отримано загальні рівняння, які дозволяють розраховувати імпульс та енергію поля при його взаємодії з кристалом.

Ключові слова: тензор енергії-імпульсу, електромагнітне поле, тензор Максвела, канонічний вигляд тензора поля.

A new formalism is developed for the description of the electromagnetic field interaction with a crystal. The main characteristics of the proposed approach are the energy and momentum density of the field. The reaction of the environment to an external perturbation is considered as a local change in the geometry, which consists in the rotation of an orthogonal basis built on the induction vectors and the field momentum. In this case, the geometric characteristics are determined by the structural parameters of the medium. Fundamental equations in the local basis are obtained. As shown, the separation of waves by polarization, when considering problems of X-ray wave scattering on a crystal, is not quite correct even in the case of an ideal crystal. General equations are obtained that allows one to calculate the momentum and energy of a field when it interacts with a crystal.

Key words: energy-momentum tensor, electromagnetic field, Maxwell tensor, canonical form of the field tensor.

(Получено 15 января 2019 г.; окончат. вариант — 4 февраля 2019 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе предлагается альтернативный подход к описанию электромагнитного поля в веществе, анонсированный в [1]. Все рассуждения носят достаточно общий характер, однако, учитывая профессиональные интересы авторов, акцент сделан на рентгеновский диапазон.

В уравнениях Максвелла присутствуют напряжённости электрического и магнитного полей и, если речь идёт о веществе, соответствующих индукций. Все известные подходы для описания волновых полей основываются так или иначе на решении или анализе уравнений Максвелла именно по отношению к напряжённостям полей [2–5]. Однако непосредственно в эксперименте напряжённости полей не измеряются. В эксперименте измеряется энергетическая характеристика волны (интенсивность), а направление распространения волны (вектор Умова–Пойнтинга) связывается с импульсом волны. Соответствие с экспериментом достигается посредством вычисления этих характеристик через напряжённости полей.

Например, чтобы найти коэффициент отражения волны от среды, необходимо вычислить нормальную по отношению к поверхности компоненту вектора Умова–Пойнтинга.

Импульс и энергия (точнее, их плотности) нелинейны (квадратичны) по полям. Вследствие этого их нельзя непосредственно представить как суперпозицию получаемых решений для полей. Ответ находится лишь на конечной стадии, когда уже получены решения для полей. С одной стороны, это несомненный плюс (решать линейные уравнения гораздо проще, нежели нелинейные). С другой стороны, при такой процедуре оказывается затруднительным прямой анализ зависимости наблюдаемых параметров (распределение интенсивности в заданном направлении в пространстве) от характеристик рассеивающего объекта.

Приведём простой пример. Простейшая модельная система эпитаксиальная плёнка–подложка в условиях рентгеновской дифракции может давать разнообразные профили кривых дифракционного отражения в зависимости от величины рассогласования решёток (точнее, деформации). Это может быть как единичный профиль (искажённый влиянием плёнки брэгговский максимум), так и вполне оформленные дифракционные максимумы, ассоциирующиеся с дифракцией от плёнки и от подложки. Ясно, что такое разнообразие возникает вследствие интерференции полей в плёнке и подложке. При этом возникает вопрос: если максимумы разрешаются, то какой деформации решётки соответствует их угловое положение? Понятно, что если максимумы сравнительно далеко друг от друга, то угловому расстоянию между ними как будто соответствует средняя деформация плёнки [6]. А если максимумы близко и интерференцией нельзя пренебречь?

Второй пример. Как известно, вторичные процессы в условиях динамической рентгеновской дифракции определяются интенсивностью дифракционной волны в кристалле. Здесь опять-таки возникает большое разнообразие форм кривых выхода фотоэлектронов в зависимости от структурных характеристик кристалла. Эти кривые моделируются с помощью решений динамических уравнений для полей. И здесь мы имеем неявную зависимость экспериментальных характеристик от параметров рассеяния.

В связи с этим возникает следующая постановка проблемы. Можно ли так изначально переформулировать задачу, чтобы описывать поля с помощью непосредственно измеряемых характеристик — плотностей импульса и энергии? Иначе говоря, необходимо описать взаимодействие поля и вещества посредством плотностей энергии и импульса в соответствии с уравнениями движения электромагнитного поля. При этом динамика электромагнитного поля будет описана через энергию и импульс.

Как известно, уравнения движения динамической системы (уравнения Эйлера–Лагранжа) получаются из вариационного принципа как условие экстремальности некоторого функционала действия. Этот принцип справедлив как для механических систем, так и для систем с бесконечным числом степеней свободы — полей. При этом инвариантность действия относительно определённой группы преобразований координат (внешние симметрии) или калибровочных преобразований (внутренние симметрии) приводит к ковариантным уравнениям движения и к фундаментальным законам сохранения.

Законы сохранения следуют из двух теорем Нётер [7–9] (прямых и обратных), которые формулируются соответственно, для глобальных и локальных преобразований симметрии функционала действия. Смысл первой теоремы Нётер сводится к следующему. Если действие инвариантно относительно преобразований глобальных симметрий, образующих некоторую группу Ли [9], то для каждого преобразования симметрии и любого решения уравнений Эйлера–Лагранжа сохраняются величины, называемые токами. Сохранение тока означает, что его 4-дивергенция обращается в ноль. Глобальная инвариантность означает, что параметр преобразования не зависит от точек пространства–времени. В свою очередь интегрирование токов по специально выбранным областям пространства–времени даёт соответствующие каждому току сохраняющиеся заряды.

Пусть действие инвариантно относительно трансляций в пространстве–времени. Тогда общее выражение для тока переходит в выражение для тензора энергии–импульса для полей, 4-дивергенция которого в силу первой теоремы Нётер обращается в ноль. Именно 4-дивергенция тензора энергии–импульса даёт описание электромагнитного поля как динамической системы.

Вторая теорема Нётер устанавливает связь между экстремалями (левыми частями уравнения Эйлера–Лагранжа) и производными от экстремалей в случае, если функционал действия инвариантен относительно локальных (калибровочных) преобразований. Согласно второй теореме Нётер, из калибровочной инвариантности следует, что не все уравнения движения являются линейно независимыми. Таким образом, локальная инвариантность функционала действия не влечёт за собой новые законы сохранения, а лишь ограничивает число линейно независимых уравнений движения.

Отметим, что первая теорема Нётер формулируется для инфинитезимальных (бесконечно малых) трансляций пространства–времени. Группа Ли в формулировке первой теоремы Нётер [8] непосредственно связана с непрерывностью пространственно-временных симметрий. Это обстоятельство в данном случае имеет решающее значение.

Поскольку длина рентгеновской волны сравнима с атомарными размерами, известная в макроскопической электродинамике процедура усреднения оказывается неприменимой, и диэлектрическая проницаемость оказывается функцией координат. Тогда, разумеется, непрерывность трансляций в атомарных масштабах несовместима с условием однородности среды. Лишь в частном случае кристаллической среды обеспечивается инвариантность функционала действия, причём лишь по отношению к дискретной, а не непрерывной группе пространственных трансляций на вектора решётки Бравэ. Тем самым непосредственное применение первой теоремы Нётер для построения тензора энергии–импульса как динамической основы теории с учётом микроскопической структуры среды оказывается невозможным.

2. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Здесь мы предлагаем другой подход, возможно менее общий и более элементарный в математическом отношении, однако позволяющий получить интересующие нас соотношения непосредственно из уравнений классической макроскопической электродинамики.

Будем исходить из пары уравнений Максвелла для поля в отсутствие зарядов и токов в среде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{1}$$

Примем во внимание, что в материальном уравнении для среды диэлектрическая проницаемость (поляризуемость), в отличие от обычной макроскопической теории диэлектриков, оказывается непрерывной функцией координат:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} = (1 + \chi(\mathbf{r}))\mathbf{E}. \tag{2}$$

Такое представление естественно для случая рентгеновских волн. Однако взаимодействие электромагнитных волн со средой и в других диапазонах может описываться формулой (2). Например, искусственные периодические структуры — фотонные кристаллы [10], объекты рентгеновской оптики для мягкого рентгена [11] также формально соответствуют (2), поскольку рассевающие излучение элементы образуют некоторую пространственную структуру.

В формулах (1), (2) и далее используются стандартные обозначения, $\nabla = \mathbf{i}_k\partial/\partial x_k$ — оператор Гамильтона в некотором декартовом базисе $\mathbf{i}_k$, по немому индексу k производится суммирование (соглашение Эйнштейна).

Для случая рентгеновского диапазона уравнение (2) представляет собой феноменологическое описание процесса взаимодействия рентгеновского волнового поля со средой при известных физических предположениях относительно характера рассеяния. Эти предположения являются физической основой динамической теории рентгеновской дифракции Эвальда–Лауэ и последующих вариантов ее обобщения [2–5]. Разумеется, для идеального кристалла поляризуемость $\chi(\mathbf{r})$ представляет собой трёхмерно-периодическую функцию.

Приведём обобщение на случай $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ известного в электродинамике вывода закона изменения импульса. Рассмотрим величину $\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{D}$ в некотором ортонормированном декартовом базисе $\mathbf{i}_m$, пока не конкретизируя его:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ (\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{D})_1 & (\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{D})_2 & (\operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{D})_3 \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_3 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая детерминант и группируя члены, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{D} &= \nabla\cdot(\mathbf{DE}) - \frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{I}\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})) + \frac{E^2}{2}\nabla\varepsilon - \mathbf{E}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{D}) = \\ &= \nabla\cdot(\mathbf{DE}) - \frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{I}\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})) + \frac{E^2}{2}\nabla\varepsilon. \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично найдем величину $\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} &= \nabla\cdot(\mathbf{HH}) - \frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{I}\cdot H^2) - \mathbf{H}(\nabla\cdot\mathbf{H}) = \\ &= \nabla\cdot(\mathbf{HH}) - \frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{I}\cdot H^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Введенные величины $\mathbf{DE} = D_iE_j$, $\mathbf{HH} = H_iH_j$, в (3) и (4) представляют собой диады (внешние произведения), $\mathbf{I} = \mathbf{i}_m\mathbf{i}_m$ — единичный тензор. В дальнейшем выражение вида $\mathbf{ab}$ будет означать внешнее произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. При выводе (3) и (4) учтены условия $\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$ (т.е. заряды отсутствуют), а также $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$. Отметим, что поскольку оператор ∇ имеет векторный характер, соотношения (3) и (4) не зависят от выбора базиса.

Теперь образуем сумму (3) и (4) и, с учетом (1), после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} &= \nabla\cdot\left(\mathbf{DE} + \mathbf{HH} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + H^2)\right) + \frac{E^2}{2}\nabla\varepsilon = \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{H}). \end{aligned}$$

Это уравнение можно представить в следующем виде

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{E^2}{2} \nabla \varepsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{5}$$

Здесь введены следующие величины: тензор натяжений Максвелла в среде **T**

$$\mathbf{T} = \mathbf{DE} + \mathbf{HH} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + H^2) = \mathbf{DE} + \mathbf{HH} - w\mathbf{I}, \tag{6}$$

плотность энергии поля

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + H^2), \tag{7}$$

а также объёмная плотность полного импульса поля $\mathbf{P} = (\mathbf{D} \times \mathrm{H})/c$ (для краткости будем называть её импульсом).

Формула (5) представляет собой первое из системы соотношений, связывающих изменение энергетических характеристик (тензор Максвелла) с изменением импульса поля. Согласно (5), изменение импульса поля со временем в общем случае определяется не только пространственной неоднородностью тензора Максвелла, но и градиентом диэлектрической проницаемости $\nabla\varepsilon$. При этом, согласно (6) с учётом (2) тензор натяжений **T** оказывается симметричным, как и в случае вакуума.

Найдём с учётом (1) значение величины $\mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{H}$:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \tag{8}$$

Для дивергенции $c\mathbf{P}$ получим:

$$c(\nabla \cdot \mathbf{P}) = \nabla \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{E} \times \mathbf{H})) = \varepsilon\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \nabla\varepsilon \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) =$$

$$= \varepsilon\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{H}).$$

Отсюда

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{H}) - \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{H})). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим закон изменения импульса и энергии поля в следующем виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{10}$$

Это второе соотношение, связывающее (пространственное) изменение импульса и (временное) изменение энергии поля в случае неоднородной среды.

3. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕНЗОРА МАКСВЕЛЛА И УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Таким образом, уравнения (5) и (10) связывают между собой пространственные и временные изменения энергии и импульса электромагнитного поля и должны рассматриваться как единая система. Они представляют собой, соответственно, законы изменения импульса и энергии электромагнитного поля в случае неоднородной среды, когда $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$. Однако, уравнения (5), (10) в общем случае оказываются незамкнутыми относительно w и $\mathbf{P}$, поскольку в тензор $\mathbf{T}$ входят диады $\mathbf{DE}$ и $\mathbf{HH}$. Кроме того, изменение импульса, согласно (5), зависит не только от дивергенции тензора $\mathbf{T}$, но и от амплитуды электрического поля посредством $E^2/2$. В связи с этим возникает вопрос: существует ли такая система координат, в которой тензор Максвелла $\mathbf{T}$ имеет простейший (канонический) вид. Соответственно, окажется ли при этом система (5), (10) замкнутой относительно w и $\mathbf{P}$, что позволит однозначно определять эти величины.

При выводе уравнений (5) и (10) мы пользовались произвольным декартовым базисом, который никак не связан с векторами электромагнитного поля. Однако очевидно, что вид тензора Максвелла $\mathbf{T}$ зависит от выбора базиса в соответствии с трансформационными свойствами симметричного тензора второго ранга. Из вида тензора $\mathbf{T}$ очевидно следует, что для него выделенные направления в пространстве определяются векторами $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{P}$. Покажем это.

Как известно, каноническое представление тензора реализуется в базисе, построенном на собственных векторах тензора. Кроме того, поскольку тензор $\mathbf{T}$ симметричен, в базисе собственных векторов он имеет диагональный вид.

Чтобы найти канонический вид тензора Максвелла (6), найдём собственные значения λ_j и собственные векторы $\mathbf{e}_j$ тензора $\mathbf{T}$ в нормированном базисе, удовлетворяющие известному уравнению:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j = \lambda \mathbf{e}_j. \tag{11}$$

Характеристическое уравнение для (11) имеет вид:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = \mathbf{0},$$

где величины $\mathbf{I}_j$ — главные инварианты тензора $\mathbf{T}$:

$$I_1 = Tr(\mathbf{T}), \quad I_2 = \frac{1}{2}[Tr(\mathbf{T})^2 - Tr(\mathbf{T}^2)], \quad I_3 = \det(\mathbf{T}).$$

Здесь $Tr(\mathbf{T})$ — след тензора $\mathbf{T}$. Для того, чтобы не решать непосредственно кубическое уравнение, используем симметрию тензора **T**. Из вида (6) ясно, что одно собственное значение $\lambda_3 = -w$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{DE} + \mathbf{HH} - w\mathbf{I} + w\mathbf{I} = \mathbf{DE} + \mathbf{HH}; \quad \det(\mathbf{DE} + \mathbf{HH}) = 0.$$

Найдём собственный вектор $\mathbf{u}_3$, соответствующий $\lambda_3 = -w$. Решая (11) для $\lambda_3 = -w$, найдем величины:

$$u_{31} = E_2H_3 - E_3H_2, \quad u_{32} = E_3H_1 - E_1H_3, \quad u_{33} = E_1H_2 - E_2H_2,$$

которые образуют вектор

$$\mathbf{u}_3 = u_{3j}\mathbf{e}_j = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Отсюда

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|}.$$

В ортонормированном базисе $\mathbf{e}_j$: $T'_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j$ тензор **T** имеет вид:

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{pmatrix}.$$

Теперь потребуем, чтобы тензор **T** в данном базисе оказался диагональным, т.е. $T_{12} = T_{21} = 0$. В этом случае, очевидно, $T_{11} = \lambda_1$, $T_{22} = \lambda_2$, и $\mathbf{e}_{1,2}$ — собственные векторы. Отсюда получаем условия диагональности тензора **T**:

$$T_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{H})(\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_2) = 0,$$
$$T_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{H})(\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_1) = 0.$$

Отсюда следует, что векторы **D** и **E** ориентированы вдоль $\mathbf{e}_1$, а вектор **H** — вдоль $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D} = D, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} = E, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{H} = 0,$$
$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{H} = H.$$

Тогда диагональные компоненты T_{11} и T_{22} тензора **T** оказываются равными по величине и противоположными по знаку:

$$T_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1 = DE - w = \lambda_1 = \frac{1}{2}(DE - H^2),$$

$$T_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2 = H^2 - w = \lambda_2 = -\lambda_1 = \frac{1}{2}(H^2 - DE).$$

Нормированные собственные векторы определяются следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{D}}{D} = \frac{\mathbf{E}}{E}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{H}}{H}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{P}}{P}. \tag{12}$$

Теперь потребуем выполнения дополнительного условия $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Обоснование этого требования приведём ниже. В этом случае возникает дополнительная связь между полями: $DE = H^2$.

Таким образом, чтобы тензор $\mathbf{T}$ описывал электромагнитное поле, необходимы следующие условия:
1) ортогональность полей

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{H} = D \cdot H = 0; \tag{13}$$

2) связь амплитуд полей

$$DE = \varepsilon E^2 = H^2. \tag{14}$$

Как будет видно далее, эти условия и, в частности, наличие связи амплитуд полей (14), имеет решающее значение для вывода замкнутой системы уравнений для энергии и импульса поля. Отметим, что в случае неоднородной среды, если $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$, условия (13) и (14) имеют локальный характер. Кроме того, условия (13) и (14) накладывают ограничения для полного поля. Это означает, что они, вообще говоря, не относятся отдельно к проходящей, отражённой и т.д. волнам.

В итоге матричное представление канонического вида тензора Максвелла $\mathbf{T}$ в базисе $\mathbf{e}_j$ приобретает следующий вид:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{pmatrix}.$$

Или, в диадном представлении:

$$\mathbf{T} = -w(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3).$$

Таким образом, в каноническом представлении тензор Максвелла $\mathbf{T}$ локально определяется плотностью энергии w и направлением переноса импульса $\mathbf{e}_3$. При этом, в соответствии с теоремами о собственных значениях и собственных векторах симметричного тензора собственные значения (как это и должно быть для энергетических характеристик) оказываются вещественными, а собственные векторы, соответствующие этим значениям, ортогональными.

Условие локальной ортогональности базиса для канонического представления тензора Максвелла **T** означает, что при переходе от точки к точке базис изменяет лишь свою ориентацию в пространстве. Это обстоятельство будет учтено при выводе фундаментальных уравнений теории.

4. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ТЕНЗОРА ПОЛЯ

Выше при построении канонического вида тензор Максвелла **T** были введены условия равенства нулю двух собственных значений: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Приведём обоснование этих условий, опираясь на известные результаты релятивистской электродинамики. Введём четырёхмерный тензор поля F_{ik} в вакууме в пространстве Минковского $R^4_{1,3}$:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i,k = 0,1,2,3.$$

По определению [12], инвариантами тензора F_{ik} называются коэффициенты характеристического многочлена

$$P(\lambda) = \det(F_{ik} - \lambda g_{ik}),$$

где g_{ik} — метрика Минковского:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственный расчёт приводит к характеристическому многочлену четвертого порядка:

$$P(\lambda) = -\lambda^4 + (E^2 - H^2)\lambda^2 + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2,$$

из которого следуют известные инварианты поля $E^2 - H^2$ и $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$.

Кососимметрический тензор поля F_{ik} может быть локально приведён к каноническому виду в пространстве $R^4_{1,3}$ с помощью лоренцевых преобразований. При этом конкретный вид F_{ik} зависит от условий, налагаемых на инварианты $E^2–H^2$ и $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$, и определяется следующей теоремой [12].

1. Пусть инвариант поля $E^2–H^2$ не равен нулю.

Если $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\neq 0$, тогда лоренцевым преобразованием можно привести тензор F_{ik} к такому виду, что векторы **E** и **H** параллельны и оба отличны от нуля.

Если $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$, то можно привести тензор к такому виду, что $\mathbf{E}\neq 0$, $\mathbf{H}=0$ при $E^2–H^2>0$ или $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{H}\neq 0$ при $E^2–H^2<0$.

2. Пусть $E^2–H^2=0$ и $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$. Тогда после любого лоренцева преобразования векторы **E** и **H** будут взаимно перпендикулярны и равны по длине. Тензор F_{ik} можно привести в этом случае к виду:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нас представляет интерес второй пункт приведённой теоремы, поскольку именно в этом случае реализуется особое состояние поля — электромагнитная волна. Как видно, условие связи амплитуд и условие поперечности $E^2–H^2=0$ и $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$ отвечают электромагнитной волне как особому инвариантному виду поля. В этом случае условие (14) может рассматриваться как обобщение классического инварианта поля $E^2–H^2$ на случай электродинамики сплошной немагнитной среды.

Покажем, что для электромагнитной волны для четырёхмерного тензора энергии–импульса поля выполняются условия равенства нулю двух собственных значений: $\lambda_1=\lambda_2=0$. Как известно, для тензора поля F_{ik} по скалярному лагранжиану

$$L=-\frac{1}{4}F^{ik}F_{ik}.$$

строится симметричный четырёхмерный тензор энергии–импульса **T**. Явный вид этого тензора определяется из первой теоремы Нётер [9]. Согласно теореме Нётер, поскольку действие для свободного электромагнитного поля в пространстве Минковского инвариантно относительно глобального действия группы Пуанкаре (пространственно-временные трансляции плюс отражения), существует тензор второго ранга, 4-дивергенция которого обращается в ноль:

$$\partial_k T_i^k=0.$$

Эта величина, называемая током, и есть тензор энергии–

импульса:

$$T_i^k = \frac{1}{2}(-F_{ik}F_m^k + \frac{1}{4}g_{ik}F^2)g_{km}.$$

Решив секулярное уравнение

$$\det(T_i^k - \lambda\delta_i^k) = 0,$$

определим собственные значения T_i^k. Поскольку тензор T_i^k симметричен, его четыре собственных значения попарно совпадают:

$$2\lambda_1 = 2\lambda_3 = H^2 + \frac{1}{2}(E^4 + H^4 - 4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2 + 2E^2H^2)^{1/2},$$
$$2\lambda_2 = 2\lambda_4 = H^2 - \frac{1}{2}(E^4 + H^4 - 4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2 + 2E^2H^2)^{1/2}.$$

Отсюда видно, что при выполнении условий для электромагнитной волны $E = H$, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$ собственные значения приобретают следующий вид:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = E^2 = w; \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 0.$$

Таким образом, мы приходим к условию равенства нулю двух собственных значений тензора энергии–импульса. Поскольку тензор Максвелла является пространственной частью тензора энергии–импульса, то ясно, что это условие должно выполняться и для тензора Максвелла $\mathbf{T}$, определяемого формулой (6).

Необходимо отметить, что приведенные обоснования использовали тензоры поля и энергии–импульса в вакууме. Полученный выше вывод для тензора Максвелла является более общим, поскольку мы рассматриваем поле в веществе.

5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ПОЛЯ В ЛОКАЛЬНОМ БАЗИСЕ

Условие (14) позволяет выразить плотность энергии поля через амплитуду электрического вектора и диэлектрическую проницаемость:

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}D^2 + H^2\right) = \frac{E^2}{2}\varepsilon(1+\varepsilon).$$

Отсюда

$$\frac{E^2}{2} = \frac{w}{\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

Тогда уравнение (5) приобретает вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{w}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \nabla \varepsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{15}$$

Уравнения (10), (15) с учётом канонического представления $\mathbf{T} = -w(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$ образуют замкнутую относительно импульса $\mathbf{P}$ и энергии w систему для неоднородной среды. Тем самым, можно было бы считать поставленную задачу определения $\mathbf{P}$ и w поля в веществе для заданной характеристики среды $\varepsilon(\mathbf{r})$ решённой.

Однако уравнений (10), (15), при всей их формальной простоте, оказывается не достаточно для определения $\mathbf{P}$ и w поля. Дело в том, что в принятом нами представлении диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\mathbf{r})$ не только является физической характеристикой среды как таковой, но и определяет геометрические свойства, влияющие на распределение волнового поля.

В связи с этим, здесь уместно сделать следующее замечание. Отмеченная выше ситуация оказывается достаточно типичной, когда обобщение теории при сокращении аксиоматической базы («сущностей») влечёт за собой неизбежное усложнение описательных средств, в данном случае математического аппарата. Под обобщением здесь понимается обращение к общефизическим категориям — энергии и импульсу, подчиняющимся глобальным законам сохранения.

В самом деле, приведённый выше вывод фундаментальных уравнений (10), (15) показывает, что они оказываются справедливыми в наиболее компактном (каноническом) виде только в специальном локальном базисе. Следовательно, необходимо рассматривать все дифференциальные операции в ортогональной криволинейной системе координат, задаваемой базисом (12).

Чтобы явно учесть это обстоятельство, запишем систему (10), (15) в следующем виде:

$$\nabla' \cdot \mathbf{T} + \frac{w}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \nabla' \varepsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \nabla' \cdot \mathbf{P} - \frac{\nabla' \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{16}$$

Здесь штрих означает дифференцирование в базисе (12).

Как уже отмечалось выше, система (16), при внешней формальной простоте, не может быть непосредственно использована для расчёта импульса и энергии поля. В самом деле, для решения такой задачи необходимо иметь явные выражения для перехода от локальной системы координат, задаваемой базисом (12), к лабораторной системе координат, в которой и реализуется эксперимент. Иначе говоря, для корректной постановки задачи требуется явно определить геометрию как локальную характеристику среды.

В общем случае, такая задача оказывается совершенно неподъёмной. Например, в общем случае векторы $\mathbf{e}_j$ рассматриваются как локальный базис криволинейных координат, и обычное дифференцирование заменяется ковариантным (абсолютным). Тогда возникает необходимость рассчитывать 27 коэффициентов связности — символы Кристоффеля 2-го рода для трёхмерного пространства [9].

К счастью, для дальнейшего продвижения теории у нас есть мощное эвристическое основание, а именно, условие локальной ортогональности поля и условие связи амплитуд. Это основание даёт возможность установить связь между геометрией поля и геометрией эксперимента, что и является нашей дальнейшей целью.

Наметим дальнейшую программу. Вначале требуется найти выражения для дивергенции и градиента в полевом базисе через декартовый базис и дополнительную характеристику — локальный поворот базиса, который является следствием ортогональности. Далее следует расчёт явного вида вектора угла поворота как функции поляризуемости среды. Эти вопросы являются предметом рассмотрения второй части настоящей работы.

Автор выражает глубокую признательность за ценные замечания по основным вопросам работы и полезное обсуждение профессору Ю. П. Хапачеву.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Dyshekov, *Tech. Phys. Lett.*, **44**, Iss. 10: 902 (2018).
2. R. W. James, *The Optical Principles of the Diffraction of X-Rays.* (London: G. Bell and Sons Ltd.: 1962), vol. II.
3. Z. G. Pinsker, *Dynamical Scattering of X-Rays in Crystals. Springer Series in Solid-State Sciences 3* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag: 1978).
4. А. А. Дышеков, Ю. П. Хапачев, *Новые подходы к задачам рентгенодифракционной кристаллооптики* (Ред. В.А.Елюхин, Б. С. Карамурзов) (Нальчик: Кабардино-Балкарский госуд. ун-т: 2010).
5. A. A. Dyshekov, *Crystallogr. Rep.*, **58**, Iss. 7: 984 (2013).
6. F. N. Chukhovskii and Yu. P. Khapachev, *Cryst. Rev.*, **3**, Iss. 3: 257 (1993).
7. Л. С. Полак, *Вариационные принципы механики. Их развитие и применение в физике* (Москва: Либроком: 2010).
8. Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, *Калибровочные поля* (Москва: Атомиздат: 1980).
9. M. O. Katanaev, *Геометрические методы в математической физике* (Москва: Математический ин-т имени В. А. СтекловаРАН, Казань: Казанский федеральный ун-т: 2016).
10. J.-M. Lourtioz, H. Benisty, V. Berger, J.-M. Gérard, D. Maystre, A. Tchelnokov, and D. Pagnoux, *Photonic Crystals. Towards Nanoscale Photonic Devices* (Springer: 2008).
11. V. V. Aristov and L. G. Shabel'nikov, *Phys. Usp.*, **51**: 57 (2008).
12. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения* (Москва: Наука: 1986).

REFERENCES

1. A. A. Dyshekov, *Tech. Phys. Lett.*, **44**, Iss. 10: 902 (2018).
2. R. W. James, *The Optical Principles of the Diffraction of X-Rays*. (London: G. Bell and sons Ltd.: 1962), vol. **II**.
3. Z. G. Pinsker, *Dynamical Scattering of X-Rays in Crystals. Springer Series in Solid-State Sciences 3* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag: 1978).
4. A. A. Dyshekov and Yu. P. Khapachev, *Novye Podkhody k Zadacham Rentgenodifraktsionnoy Kristallooptiki* [New Approaches to the Problems of X-ray Diffraction Crystal Optics] (Eds. V. A. Elyukhin and B. S. Karamurzov) (Nalchik: Kabardino-Balkarian State University: 2010) (in Russian).
5. A. A. Dyshekov, *Crystallogr. Rep.*, **58**, Iss. 7: 984 (2013).
6. F. N. Chukhovskii and Yu. P. Khapachev, *Cryst. Rev.*, **3**, Iss. 3: 257 (1993).
7. L. S. Polak, *Variatsionnye Printsipy Mekhaniki. Ikh Razvitie i Primenenie v Fizike* (Moscow: Librokom: 2010) (in Russian).
8. N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Kalibrovochnye Polya* (Moscow: Atomizdat: 1980) (in Russian).
9. M. O. Katanaev, *Geometricheskie Metody v Matematicheskoy Fizike* (Moscow: V. A. Steklov Mathematical Institute, R.A.S., Kazan: Kazan Federal University: 2016) (in Russian).
10. J.-M. Lourtioz, H. Benisty, V. Berger, J.-M. Gérard, D. Maystre, A. Tchelnokov, and D. Pagnoux, *Photonic Crystals. Towards Nanoscale Photonic Devices* (Springer: 2008).
11. V. V. Aristov and L. G. Shabel'nikov, *Phys. Usp.*, **51**: 57 (2008).
12. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Sovremennaya Geometriya. Metody i Prylozheniya* (Moscow: Nauka: 1986) (in Russian).