Metallophysics and Advanced Technologies
Металофіз. новітні технол.
Metallofiz. Noveishie Tekhnol.
2019, vol. 41, No. 7, pp. 965–979
https://doi.org/10.15407/mfint.41.07.0965
Reprints available directly from the publisher

INTERACTIONS OF RADIATION AND PARTICLES WITH CONDENSED MATTER

PACS numbers: 03.50.De, 41.50.+h, 61.05.cc, 61.05.cf, 61.05.cm, 61.05.cp

Фундаментальная система уравнений для импульса и энергии электромагнитного поля в неоднородной среде. II. Фундаментальные уравнения в декартовом базисе

А. А. Дышеков

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173,
360004 Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Российская Федерация

Получены фундаментальные уравнения для импульса и энергии электромагнитного поля в декартовом базисе в неоднородной среде. Эти уравнения могут быть основой для нового подхода в описании взаимодействия электромагнитного излучения с веществом при локальном изменении поляризуемости среды. Показано, что разделение волн на поляризации при рассмотрении задач рассеяния рентгеновской волны на кристалле не вполне корректно даже в случае идеального кристалла.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, электромагнитное поле, тензор Максвелла, производная Гато, канонический вид тензора поля.

Отримано фундаментальні рівняння для імпульсу та енергії електромагнітного поля у декартовому базисі в неоднорідному середовищі. Ці рівняння можуть бути основою для нового підходу в описі взаємодії електромагнітного випромінення з речовиною при локальній зміні поляризованості середовища. Показано, що розділення хвиль на поляризації при розгляді задач розсіювання рентгенівської хвилі на кристалі є не зовсім коректним навіть у випадку ідеального кристала.

Corresponding author: Artur Albekovich Dyshekov
E-mail: dushekov@yandex.ru

Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky Str., 360004 Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russian Federation

Citation: A. A. Dyshekov, Fundamental System of Equations for Electromagnetic Field Momentum and Energy in an Inhomogeneous Medium. II. Fundamental Equations in Cartesian Basis, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **41**, No. 7: 965–979 (2019) (in Russian), DOI: 10.15407/mfint.41.07.0965.

Ключові слова: тензор енергії-імпульсу, електромагнітне поле, тензор Максвела, похідна Ґато, канонічний вигляд тензора поля.

Fundamental equations are obtained for the momentum and energy of the electromagnetic field in the Cartesian basis in an inhomogeneous medium. These equations can be the basis for a new approach in describing the interaction of electromagnetic radiation with matter when the polarization of the medium changes locally. As shown, the separation of waves by polarization when considering problems of X-ray wave scattering on a crystal is not quite correct even in the case of an ideal crystal.

Key words: energy-momentum tensor, electromagnetic field, Maxwell tensor, Gateaux derivative, canonical form of the field tensor.

(Получено 15 января 2019 г.; окончат. вариант — 4 февраля 2019 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] были получены фундаментальные уравнения для импульса и энергии поля в локальном базисе $\mathbf{e}_m$, связанном с векторами **E**, **H** и **P** электромагнитной волны в среде с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$:

$$\nabla' \cdot \mathbf{T} + \frac{w}{\varepsilon(1+\varepsilon)}\nabla'\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \nabla' \cdot \mathbf{P} - \frac{\nabla'\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{1}$$

Здесь и далее используются обозначения работы [1]. Эти уравнения неудобны для практического расчёта энергии и импульса поля в кристалле, поэтому желательно перейти к декартовому базису, привязанному к лабораторной системе. С этой целью получим явный вид соответствующих дифференциальных операторов из (1) в декартовом базисе.

2. РАСЧЁТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ $\nabla'\cdot\mathbf{P}$, $\nabla'\cdot\mathbf{T}$, $\nabla'\varepsilon$ В ДЕКАРТОВОМ БАЗИСЕ

Выбор декартового базиса, в котором рассматривается распространение волны, определяется исходным приближением задачи. Ясно, в качестве такого приближения следует рассматривать плоские монохроматические линейно поляризованные волны в однородном континууме. Тогда реакция немагнитной среды на внешнее воздействие описывается простейшим материальным соотношением $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = (1+\chi_0)\mathbf{E}$, что приводит к преломлению волны. Если рассматривается распространение рентгеновской волны в кристалле, то величина χ_0, как известно, представляет собой среднее значение поляризуемости χ по всей решётке.

В процессе взаимодействия рентгеновской волны с кристаллом происходит локальная вариация базиса $\mathbf{e}_m$, которая приводит, как показано в [1], к изменению пространственной ориентации осей.

Таким образом, мы будем рассматривать задачу распространения волны в ортонормированном базисе $\mathbf{i}_k$, задаваемом векторами $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{P}_0$ в приближении сплошной однородной среды:

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{D}_0}{D_0}, \quad \mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{H}_0}{H_0}, \quad \mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{P}_0}{P_0}.$$

Следовательно, все дифференциальные операции в системе уравнений (1) необходимо отнести именно к этому базису.

2.1. Расчёт дивергенции $\nabla'\cdot\mathbf{P}$

Основная идея расчёта $\nabla\cdot\mathbf{P}$ в базисе $\mathbf{i}_k$ заключается в следующем. Производная по направлению вектора $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ представляет собой тензорную величину второго ранга, бескоординатное представление которой записывается как $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$. По определению, дивергенция вектора$\nabla\cdot\mathbf{P}$, как инвариантная величина, есть след тензора $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$:

$$\nabla'\cdot\mathbf{P} = Tr\left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{r}}\right) = Tr\left(\frac{\partial(P^m\mathbf{e}_m)}{\partial\mathbf{r}}\right).$$

Вектор $\mathbf{P}$ представлен здесь в виде разложения по базису $\mathbf{e}_m$. Следовательно, определение $\nabla\cdot\mathbf{P}$ сводится к вычислению тензора $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$.

Бескоординатный вид тензора $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$ можно получить используя так называемую слабую производную, или производную Гато. Это понятие используется в нелинейном функциональном анализе, в частности, в вариационном исчислении [2, 3].

Слабая производная определяется через дифференциал Гато (слабый дифференциал), который вводится как предел отображения F одного нормированного пространства X в другое Y при приращении h:

$$DF(x,h) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon\to 0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x+\varepsilon h)-F(x)}{\varepsilon}.$$

Иногда, согласно Лагранжу, $DF(x, h)$ называют первой вариацией отображения F в точке x. Слабый дифференциал не обязательно линеен по ε. Если же линейность имеет место, тогда $DF(x,h) = F'(x)h$ и ограниченный линейный оператор $F'(x)$ называется слабой производной, или производной Гато. Если применить эту общую конструкцию к обычному векторному пространству $\mathbf{r}$, в котором отображение осуществляется вектором $\mathbf{P}$, а приращение h отождествляется с $d\mathbf{r}$, то дифференциал Гато окажется равным:

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r} + \varepsilon \cdot d\mathbf{r}) - \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\varepsilon},$$

т.е. необходимо вычислить указанный предел. Используя представление $\mathbf{P} = P^m \mathbf{e}_m$, получим:

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial (P^m \mathbf{e}_m)}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P^m(\mathbf{r} + \varepsilon \cdot d\mathbf{r})\mathbf{e}_m(\mathbf{r} + \varepsilon \cdot d\mathbf{r}) - P^m(\mathbf{r})\mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{\varepsilon} =$$
$$= P^m \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \left(\frac{\partial P^m}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \right) \mathbf{e}_m.$$

Во втором члене этого выражения необходимо добиться, чтобы дифференциал $d\mathbf{r}$ оказался правым сомножителем. Однако просто передвинуть его нельзя, поскольку мы имеем дело с некоммутативными операциями: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$. Поэтому во втором слагаемом используем стандартный прием — вставим единичный тензор $\mathbf{i}_s \mathbf{i}_s$ как множитель перед $d\mathbf{r}$:

$$\left(\frac{\partial P^m}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \right) \mathbf{e}_m = \left(\frac{\partial P^m}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{i}_s \mathbf{i}_s) \cdot d\mathbf{r} \right) \mathbf{e}_m = \left(\frac{\partial P^m}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot (\mathbf{e}_m \mathbf{i}_s) \cdot d\mathbf{r}.$$

В итоге имеем

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{r}} = P^m \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial P^m}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot (\mathbf{e}_m \mathbf{i}_s).$$

Базис $\mathbf{e}_m$ ортогонален в каждой точке $\mathbf{r}$, поэтому он должен получаться в результате поворота базиса $\mathbf{i}_m$ вокруг некоторой оси на малый угол φ. Малость угла φ обусловлена малым отличием базисов $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{i}_m$, определяемым величиной локальной вариации $\chi(\mathbf{r})$.

Таким образом, в теорию вводится новая характеристика, отражающая взаимодействие волны со средой — локальный угол поворота базиса $\mathbf{e}_m$. В случае рентгеновской волны для идеального кристалла характеристикой среды является трёхмерно-периодическая проницаемость $\chi(\mathbf{r})$.

Как известно, любая суперпозиция ортогональных преобразований, вызванных поворотом вектора вокруг осей координат, сводится к единственному повороту вокруг некоторой оси, что составляет содержание теоремы Эйлера. В бескоординатной формулировке теорема Эйлера формулируется описанным в [3] образом. Произвольный тензор поворота $\mathbf{G}$, отличный от тождественного преобразования единичным тензором $\mathbf{I}$, допускает единственное представление

$$\mathbf{G} = \mathbf{kk} + \cos\varphi(\mathbf{I} - \mathbf{kk}) + \sin\varphi(\mathbf{k} \times \mathbf{I}),$$

где единичный вектор $\mathbf{k}$ является неподвижным вектором тензора $\mathbf{G}$ и определяет прямую в пространстве, называемою осью поворота. Вводя вектор $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{k}$, для малых φ получим закон преобразования базиса $\mathbf{e}_m$:

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{i}_m + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_m.$$

Очевидно, в силу локальности базиса $\mathbf{e}_m$, вектор $\boldsymbol{\varphi}$ есть локальная характеристика среды (полевая переменная): $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$.

Вычислим $\partial\mathbf{e}_m/\partial\mathbf{r}$, используя производную Гато:

$$d\mathbf{e}_m = \frac{\partial\mathbf{e}_m}{\partial\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathbf{i}_m + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r} + \varepsilon \cdot d\mathbf{r}) \times \mathbf{i}_m - \mathbf{i}_m - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \times \mathbf{i}_m}{\varepsilon} =$$

$$= \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}\right) \times \mathbf{i}_m = \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{i}_p\mathbf{i}_p) \cdot d\mathbf{r}\right) \times \mathbf{i}_m = \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_p\right) \cdot (\mathbf{i}_p \cdot d\mathbf{r}) \times \mathbf{i}_m =$$

$$= \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_p\right) \times \mathbf{i}_m \cdot (\mathbf{i}_p \cdot d\mathbf{r}) = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{i}_p \times \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_p) \cdot d\mathbf{r}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\mathbf{e}_m}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial(\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_m)}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}} \cdot ((\mathbf{i}_p \times \mathbf{i}_m)\mathbf{i}_p).$$

Мы получили специальный вид деривационной формулы [4], которая используется при расчёте дифференциальных операторов в криволинейных системах координат. Для тензора $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$ имеем:

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{r}} = P^m \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{i}_p \times \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_p) + \left(\frac{\partial P^m}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s\right) \cdot (\mathbf{e}_m\mathbf{i}_s).$$

Теперь получим выражение координат P^m в базисе $\mathbf{e}_m$ через P_r в базисе $\mathbf{i}_r$:

$$P^m\mathbf{e}_m = P_r\mathbf{i}_r,$$

$$P^m = P_r(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{e}_m) = P_r(\mathbf{i}_r \cdot (\mathbf{i}_m + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_m)) = P_m + (1 - \delta_{mr})\mathbf{i}_r \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_m)P_r.$$

Здесь δ_{mr} — символ Кронекера.

При подстановке P^m в $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$ видно, что первый член не даёт вклада в $Tr(\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r})$. Рассмотрим второй член в выражении для $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$:

$$\left(\frac{\partial P^m}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s\right) \cdot (\mathbf{e}_m\mathbf{i}_s) = \left(\frac{\partial P_m}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s + (1 - \delta_{mr})\frac{\partial(\mathbf{i}_r \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_m)P_r)}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s\right) \cdot (\mathbf{e}_m\mathbf{i}_s) =$$

$$= \left(\frac{\partial P_m}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s + (1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot ((\mathbf{i}_m + \varphi \times \mathbf{i}_m)\mathbf{i}_s) \approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial P_m}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) + \left(\frac{\partial P_m}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot ((\varphi \times \mathbf{i}_m)\mathbf{i}_s) +$$

$$+ \left((1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s).$$

Рассмотрим вектор

$$\varphi \times \mathbf{i}_m = (\varphi \times \mathbf{i}_m)_j \mathbf{i}_j = ((\varphi \times \mathbf{i}_m) \cdot \mathbf{i}_j)\mathbf{i}_j.$$

Ясно, что при $m = j (\varphi \times \mathbf{i}_m)_j = 0$ и второе слагаемое не даёт вклада в $Tr(\partial \mathbf{P}/\partial \mathbf{r})$.

Теперь перейдём к базису $\mathbf{i}_m$ и рассмотрим последовательно первый и третий члены:

$$\left(\frac{\partial P_m}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) = \left(\frac{\partial P_m}{\partial x_p} (\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_s) \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) =$$

$$= \left(\frac{\partial P_m}{\partial x_p} \delta_{ps} \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) = \left(\frac{\partial P_m}{\partial x_m} \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s),$$

$$Tr\left(\left(\frac{\partial P_m}{\partial x_m} \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) \right) = \left(\frac{\partial P_m}{\partial x_m} \right) = \nabla \cdot \mathbf{P},$$

$$\left((1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}_s \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) =$$

$$= \left((1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial x_p} (\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_s) \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) =$$

$$= \left((1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial x_p} \delta_{ps} \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) =$$

$$= \left((1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial x_s} \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s),$$

$$Tr\left(\left((1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial x_s} \right) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_s) \right) = (1-\delta_{mr}) \frac{\partial (\mathbf{i}_r \cdot (\varphi \times \mathbf{i}_m) P_r)}{\partial x_m}.$$

Разложим φ по базису $\mathbf{i}_m$: $\varphi = \varphi_m \mathbf{i}_m$. Имеем:

$$(1-\delta_{mr})\frac{\partial(\mathbf{i}_r\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_m)P_r)}{\partial x_m}=\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi_3P_2)-\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi_2P_3)-\frac{\partial}{\partial x_2}(\varphi_3P_1)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}(\varphi_1P_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\varphi_2P_1)-\frac{\partial}{\partial x_3}(\varphi_1P_2)=-\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{P}).$$

Собирая результаты, получим выражение для дивергенции импульса:

$$\nabla'\cdot\mathbf{P}=\nabla\cdot\mathbf{P}-\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{P}). \qquad (2)$$

2.2. Расчёт градиента $\nabla'\varepsilon$

Для того чтобы найти явное выражение для градиента $\nabla'\varepsilon$, используем следующий прием. Будем рассматривать переход от базиса $\mathbf{e}_m$ к базису $\mathbf{i}_m$ как замену переменной скалярной функции векторного аргумента. По определению, такая замена осуществляется следующим образом:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}'}\right)^T\cdot\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial\mathbf{r}}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial\mathbf{r}}\right)^T\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}'},\qquad \mathbf{r}'=\mathbf{r}+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r},$$

где знак T означает транспонирование. Используя производную Гато, найдем:

$$\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial\mathbf{r}}=\mathbf{I}+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{I}+\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}}\times\mathbf{r},$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial\mathbf{r}}\right)^T=\nabla\mathbf{r}'=\mathbf{I}-\mathbf{I}\times\boldsymbol{\varphi}-\mathbf{r}\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{r}}\right)^T=\mathbf{I}-\mathbf{I}\times\boldsymbol{\varphi}-\mathbf{r}\times\nabla\boldsymbol{\varphi}.$$

Тогда градиент ε равен

$$\nabla\boldsymbol{\varepsilon}=(\mathbf{I}-\mathbf{I}\times\boldsymbol{\varphi}-\mathbf{r}\times\nabla\boldsymbol{\varphi})\cdot\nabla'\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Отсюда, с учётом малости $\boldsymbol{\varphi}$, обращая оператор $\mathbf{I}-\mathbf{I}\times\boldsymbol{\varphi}-\mathbf{r}\times\nabla\boldsymbol{\varphi}$, получим

$$\nabla'\boldsymbol{\varepsilon}=(\mathbf{I}+\mathbf{I}\times\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{r}\times\nabla\boldsymbol{\varphi})\cdot\nabla\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (3)$$

2.3. Расчёт дивергенции $\nabla'\cdot\mathbf{T}$

Поскольку тензор $\mathbf{T}$ представляет собой внешнее произведение векторов, для расчёта дивергенции $\nabla'\cdot\mathbf{T}$ воспользуемся формулой для дивергенции диады:

$$\nabla\cdot(\mathbf{uv}) = (\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}),$$

а также известными формулами векторного анализа. В итоге имеем:

$$\begin{gathered}\nabla'\cdot\mathbf{T} = -\nabla'\cdot(w\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) = -\nabla'\cdot(w\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 - w\mathbf{e}_3\cdot(\nabla'\mathbf{e}_3) = -(\nabla\cdot(w\mathbf{e}_3))\mathbf{e}_3 - \\ -(\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times w\mathbf{e}_3))\mathbf{e}_3 - w\mathbf{e}_3\cdot(\nabla'\mathbf{e}_3) = -(\nabla w\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 - (w\nabla\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 - \\ -((\nabla\times\boldsymbol{\varphi})\cdot w\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 + ((\nabla\times w\mathbf{e}_3)\cdot\boldsymbol{\varphi})\mathbf{e}_3 - w\mathbf{e}_3\cdot(\nabla'\mathbf{e}_3).\end{gathered}$$

Вычисляем последовательно, с учётом малости $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{gathered}(\nabla w\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = (\nabla w\cdot(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3))(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) \approx \\ \approx (\nabla w\cdot\mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3 + (\nabla w\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3))\mathbf{i}_3 + (\nabla w\cdot\mathbf{i}_3)(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(w\nabla\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = w(\nabla\cdot(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3))(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) \approx w((\nabla\times\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3, \\ ((\nabla\times\boldsymbol{\varphi})\cdot w\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = w((\nabla\times\boldsymbol{\varphi})\cdot(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3))(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) \approx w((\nabla\times\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3, \\ ((\nabla\times w\mathbf{e}_3)\cdot\boldsymbol{\varphi})\mathbf{e}_3 = ((\nabla\times w(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3))\cdot\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) \approx ((\nabla w\times\mathbf{i}_3)\cdot\boldsymbol{\varphi})\mathbf{i}_3.\end{gathered}$$

Найдём градиент $\mathbf{e}_3$, используя производную Гато.

$$d\mathbf{e}_3 = \frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial\mathbf{r}'}\right)^T\cdot\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = (\nabla'\mathbf{e}_3)\cdot(\nabla\mathbf{r}')^T\cdot d\mathbf{r} = (\nabla\mathbf{e}_3)^T\cdot d\mathbf{r},$$

$$\begin{gathered}(\nabla'\mathbf{e}_3) = (\nabla\mathbf{e}_3)^T\cdot(\nabla\mathbf{r}')^{-T} = (\nabla\mathbf{r}')^{-1}\cdot(\nabla\mathbf{e}_3) = \\ (\mathbf{I}+\mathbf{I}\times\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{r}\times\nabla\boldsymbol{\varphi})\cdot\nabla(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) \approx \nabla(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3),\end{gathered}$$

$$\mathbf{i}_3\cdot\nabla(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) = ((\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{i}_p)(\mathbf{i}_p\times\mathbf{i}_3)\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi} = ((\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3\times\mathbf{i}_3)\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi} = 0.$$

Собирая результаты, получим:

$$\begin{gathered}\nabla'\cdot\mathbf{T} = -(\nabla w\cdot\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) - 2w((\nabla\times\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3 = \\ = -(\nabla w\cdot\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3) - 2w(\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}_3))\mathbf{i}_3.\end{gathered} \tag{4}$$

3. РАСЧЁТ ВЕКТОРА ПОВОРОТА ЛОКАЛЬНОГО БАЗИСА

Для того чтобы явно учесть локальность базиса, которая отражает зависимость ориентации осей в пространстве от $\chi(\mathbf{r})$, перейдём к новому ортогональному базису $\mathbf{m}_j$. Нормировку базиса $\mathbf{m}_j$ выберем исходя из условия, чтобы при переходе к приближению однородной среды $\chi(\mathbf{r}) = \chi_0 = \mathrm{const}$ (или $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 = \mathrm{const}$) базисные векторы $\mathbf{m}_j$ переходили в $\mathbf{e}_j$. Это фактически означает, что учитывается преломление волны в кристалле.

В результате векторы $\mathbf{m}_j$ имеют вид:

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\mathbf{D}}{D_0} = \frac{\varepsilon \mathbf{E}}{\varepsilon_0 E} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{m}_2 = \frac{\mathbf{H}}{H_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}}{\sqrt{\varepsilon_0}E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{m}_3 = \frac{\mathbf{P}}{P_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\left|\mathbf{E}\right|^2}{\sqrt{\varepsilon_0}\left|\mathbf{E}\right|^2}\mathbf{e}_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\mathbf{e}_3.$$

В этом базисе тензор **T** имеет вид

$$\mathbf{T} = -w(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) = -w\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3).$$

Коэффициенты Ламе [4] $h_j = \left|\mathbf{m}_j\right|$ для базиса $\mathbf{m}_j$ равны

$$h_1 = \left|\mathbf{m}_1\right| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad h_2 = \left|\mathbf{m}_2\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}, \quad h_3 = \left|\mathbf{m}_3\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Определим вектор смещения $\mathbf{u} = \mathbf{m}_j - \mathbf{e}_j$ при переходе от одного базиса к другому вдоль соответствующих направлений осей координат. В рассматриваемом нами случае рентгеновской волны в идеальном кристалле вектор **u** является микроскопической величиной, периодически изменяющейся в пределах элементарной ячейки. При этом будем считать, что $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{hr})$, где **h** — вектор обратной решётки.

Таким образом, физический смысл вектора **u** отличается, несмотря на формальное сходство, от вектора смещения атомных плоскостей, вводимого для описания динамического рассеяния рентгеновской волны в слабо искаженных кристаллах [5]. Действительно, регулярные искажения решётки (например, вызванные изгибом кристалла) в динамической теории рентгеновской дифракции в несовершенных кристаллах рассматриваются как макроскопические величины, что и позволяет описывать их в терминах классической теории упругости.

Отметим, что условие идеальности кристалла отнюдь не является принципиальным и рассматривается здесь лишь для простоты. Для реальных структур можно, разумеется, учитывать деформацию решётки так же, как это делается в теории динамической рентгеновской дифракции.

Выберем модель поляризуемости идеального кристалла в обычном виде:

$$\varepsilon = 1 + \chi_0 + \chi_h\left(\exp(i\mathbf{hr}) + \frac{\chi_{\bar{h}}}{\chi_h}\exp(-i\mathbf{hr})\right) = \varepsilon_0 + \chi_h f(\mathbf{hr}), \tag{5}$$

$$\mathbf{u} = (h_j - 1)\mathbf{e}_j = (h_j - 1)(\mathbf{i}_j + \varphi \times \mathbf{i}_j), \tag{6}$$

где χ_h и $\chi_{\bar{h}}$ — фурье-компоненты поляризуемости для рентгеновского диапазона длин волн.

Фактически мы здесь вводим альтернативную концепцию описания взаимодействия поля и вещества. Обычное описание основано на представлении о взаимодействии, которое происходит в евклидовом пространстве с неизменными метрическими свойствами. Это концепция классической физики, в которой пространство играет пассивную роль «вместилища» разворачивающихся в нём событий.

Альтернативная концепция исходит из возможности геометрической интерпретации теории, когда геометрия пространства не задаётся *ad hoc*, а определяется взаимодействием, в данном случае поля и вещества. Таким образом, геометрия приобретает динамический характер [6]. Как известно, эта идея находит свое полное развитие в общей теории относительности.

В рассматриваемом случае взаимодействие поля и среды приводит к локальному изменению геометрических свойств пространства, в котором распространяется волна. Такое изменение определяется структурными характеристиками среды и сводится к повороту базиса. Здесь позволительно провести аналогию с принципом эквивалентности в общей теории относительности. На вопрос, какова геометрия мира, можно ответить двояко. В первом случае пространство плоское и все тела испытывают гравитационное взаимодействие. Во втором случае взаимодействия нет, но пространство искривлено [6].

Для того чтобы связать вектор поворота $\boldsymbol{\varphi}$ с вектором смещения $\mathbf{u}$, мы воспользуемся аналогией с линейной теории упругости [7]. Как известно, малые смещения среды в теории упругости рассматриваются как полевые переменные, по которым строится симметричный тензор малых деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и антисимметричный тензор малых вращений $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$. Как известно, любому антисимметричному тензору соответствует дуальный ему вектор. Этим вектором для тензора $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ оказывается аксиальный вектор малых вращений $\boldsymbol{\varphi}$. Геометрический смысл вектора $\boldsymbol{\varphi}$ состоит в повороте окрестности заданной точки среды как целого вокруг оси вращения, угол и направление поворота при этом совпадают соответственно с длиной и направлением вектора $\boldsymbol{\varphi}$.

В теории упругости показывается, что вектор поворота $\boldsymbol{\varphi}$ определяется ротором вектора смещения [7]:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}. \tag{7}$$

Соотношение (7) носит общий характер и не зависит от физической природы вектора смещения $\mathbf{u}$. Подчеркнём в связи с этим, что введённый нами вектор $\boldsymbol{\varphi}$ не имеет отношения к малым поворотам сплошной среды, и аналогия с теорией упругости имеет формальный характер.

Согласно (7), используя (6), получим:

$$2\varphi = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (h_j - 1)(\mathbf{i}_j + \varphi \times \mathbf{i}_j) =$$
$$= \nabla(h_j - 1) \times \mathbf{i}_j + \nabla \times ((h_j - 1)(\varphi \times \mathbf{i}_j)).$$

Тогда для модели (5), с учетом малости φ, будем иметь:

$$2\varphi = \frac{\chi_h}{2} \nabla f \times (2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) + \frac{\chi_h}{2} \nabla \times (f(2\varphi \times \mathbf{i}_1 + \varphi \times \mathbf{i}_2 + \varphi \times \mathbf{i}_3)). \qquad (8)$$

Приближенное решение векторного уравнения (8) может быть получено с учётом малости величины фурье-компоненты поляризуемости кристалла χ_h в рентгеновском диапазоне. В этом случае решение уравнения (8) ищется в виде разложения в ряд по малому параметру χ_h:

$$\varphi = \varphi_0 + \chi_h \varphi_1 + \ldots.$$

Подставляя это разложение в (8) и далее действуя стандартным методом теории возмущений, получаем решение в нулевом приближении $\varphi_0 = 0$, и в приближении первого порядка:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}(\nabla f \times (2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)).$$

Тогда решение уравнения (8) в приближении первого порядка примет вид:

$$\varphi = \frac{\chi_h}{4}(\nabla f \times (2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)) = \frac{\nabla \chi}{4} \times (2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3), \quad \nabla f = \mathbf{h} f'(\mathbf{hr}). \qquad (9)$$

Как видно из (9), величина φ является локальной мерой отклонения геометрических характеристик среды по отношению к распространению рентгеновской волны от приближения сплошной однородной среды.

Вектор φ для идеального кристалла, когда $\chi = \chi(\mathbf{hr})$, сохраняет ориентацию в пространстве и не совпадает с базисными векторами $\mathbf{i}_m$. Если бы ось вращения совпадала с вектором $\mathbf{i}_1$, то имела бы место σ-поляризация, а если бы с вектором $\mathbf{i}_2$ — π-поляризация. Следовательно, при прохождении рентгеновской волны в идеальном кристалле при сохранении ориентации электрического и магнитного векторов поля реализуется суперпозиция σ- и π-поляризаций. Ясно, что этот результат не зависит от конкретной модели идеального кристалла, когда $\chi = \chi(\mathbf{hr})$. Следовательно, независимое рассмотрение σ- и π-поляризации при динамическом рассеянии рентгеновской волны на кристалле не вполне корректно даже в случае идеального кристалла.

Очевидно, сохранение ориентации вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$ в пространстве относится только к идеальному кристаллу. Если имеет место деформация кристалла, ориентация вектора будет меняться от точки к точке в пространстве.

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ПОЛЯ В ДЕКАРТОВОМ БАЗИСЕ

Воспользуемся малостью величины поляризуемости для рентгеновского диапазона длин волн χ и линеаризуем фундаментальную систему (1) по χ:

$$\nabla' \cdot \mathbf{T} + w\nabla\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \nabla' \cdot \mathbf{P} - \nabla\varepsilon \cdot \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Подставляя сюда (2)–(4), получим:

$$\begin{gathered} -(\nabla w \cdot \mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_3) - 2w(\nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_3))\mathbf{i}_3 + w\nabla\chi = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{P}) - \nabla\chi \cdot \mathbf{P} = -\frac{1 + \chi(\mathbf{r})}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}. \end{gathered} \tag{10}$$

Система уравнений (10) составляет основу представленной здесь теории. Она описывает распределение импульса и энергии рентгеновского волнового поля в кристалле в зависимости от структурных характеристик кристалла. Причём, эта зависимость определяется не только непосредственно через локальную поляризуемость $\chi(\mathbf{r})$, но и через градиент $\nabla\chi \sim \mathbf{h}$. Важно, фундаментальные уравнения (10) линейны по $\mathbf{P}$ и w, что позволяет конструировать решения, используя принцип суперпозиции.

5. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ТЕОРИИ

Приведенный выше вывод основных уравнений теории (10) показывает, что он носит достаточно общий характер. Он оказывается применимым, когда влияние среды на распространение волнового поля феноменологически может быть описано через локальную характеристику $\varepsilon(\mathbf{r})$ (или $\chi(\mathbf{r})$). При этом существенным для линеаризации уравнений теории является малость величины $\chi(\mathbf{r})$. При соблюдении указанных выше условий анализ уравнений (10) для различных диапазонов длин волн, разумеется, будет определяться конкретными свойствами среды $\chi(\mathbf{r})$ и не может быть проведён на основании одного универсального подхода.

Рассмотрим дальнейшую перспективу развития изложенной выше теории для случая дифракционного рассеяния рентгеновской волны в кристалле. Система уравнений (10) для кристалла не может быть решена точно, поэтому для поиска приближенного аналитического решения требуется применить методы теории возмущений. Для этого требуется выбрать малый параметр, отвечающий слабому возмущению поля в среде с периодической поляризуемостью $\chi(\mathbf{r})$. Поскольку нас интересуют дифракционные эффекты (решение ищется вблизи условия параметрического резонанса), в качестве малого параметра должна использоваться фурье-компонента поляризуемости χ_h, которая связана с дифракционным рассеянием.

В этом случае уравнения (10) в нулевом приближении описывают распространение импульса и энергии волны в сплошной однородной среде [8]:

$$-(\nabla w_0 \cdot \mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3 = \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{P}_0 = -\frac{1+\chi_0}{c^2}\frac{\partial w_0}{\partial t}. \tag{11}$$

Решение уравнений (11), отвечающее физическому требованию однородности среды, должно иметь функционально-инвариантный характер. Это означает, что если некоторый вектор

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} w(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{P}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}$$

является решением (11), то таким решением будет и произвольный вектор $\mathbf{F}(\mathbf{u})$. Как известно, плоские волны вида $f(\psi) = f(\mathbf{kr} - \omega t)$ являются функционально-инвариантными решениями волнового уравнения для однородной среды [9].

Однако, в отличие от обычных волновых уравнений, физическое решение уравнений (11) для нулевого приближения образуется не из гармонических волн, а из их произведений. В самом деле, для гармонических волн имеет место зависимость:

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{E}e^{I\psi} \times \mathbf{H}e^{I\psi} \sim EHe^{I2\psi}, \quad w \sim (Ee^{I\psi})^2 + (He^{I\psi})^2 \sim EHe^{I2\psi}.$$

где ψ — фаза волны.

Тогда для $\mathbf{P}_0$ и w_0 следует выбрать функционально-инвариантные решения в виде квадратов гармонических волн, которые включают неосциллирующие составляющие. Очевидно, именно эти составляющие фиксируются в эксперименте. Такие решения не являются гармоническими, поэтому нельзя путём простой подстановки вида

$$w \to w\exp(i\omega t), \quad \mathbf{P} \to \mathbf{P}\exp(i\omega t)$$

избавиться от производных по времени и перейти к чисто пространственной задаче. Это означает, что анализ рентгеновской дифракции в кристаллах в рамках данной теории требует развития методов теории возмущений для системы уравнений в частных производных первого порядка типа (11).

Эти вопросы составляют предмет дальнейшего развития теории.

Автор выражает глубокую признательность за ценные замечания по основным вопросам работы и полезное обсуждение профессору Ю. П. Хапачеву.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Дышеков, *Металлофиз. новейшие технол.*, **41**, № 5: 683 (2019).
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа* (Москва: Наука: 1981).
3. Е. Н. Вилчевская, *Тензорная алгебра и тензорный анализ* (Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский госуд. политехн. ун-т: 2012).
4. А. И. Лурье, *Теория упругости* (Москва: Наука: 1970).
5. З. Г. Пинскер, *Рентгеновская кристаллооптика* (Москва: Наука: 1982).
6. Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, *Калибровочные поля* (Москва: Атомиздат: 1972).
7. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики* (Москва: Наука: 1975).
8. A. A. Dyshekov, *Tech. Phys. Lett.*, **44**, Iss. 10: 902 (2018).
9. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Основные дифференциальные уравнения математической физики* (Москва: Госуд. изд-во физ.-мат. лит.: 1962).

REFERENCES

1. A. A. Dyshekov, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **41**, No. 5: 683: (2019) (in Russian).
2. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy Teorii Funktsiy i Funktsionalnogo Analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis] (Moscow: Nauka: 1981) (in Russian).
3. E. N. Vilchevskaya, *Tenzornaya Algebra i Tenzornyy Analiz* [Tensor Algebra and Tensor Analysis] (St. Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University: 2012) (in Russian).
4. A. I. Lurie, *Teoriya Uprugosti* [Theory of Elasticity] (Moscow: Nauka: 1970) (in Russian).
5. Z. G. Pinsker, *Rentgenovskaya Kristallooptika* [X-Ray Crystal Optics] (Moscow: Nauka: 1982) (in Russian).
6. N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Kalibrovochnye Polya* [Gauge Fields] (Moscow: Atomizdat: 1972) (in Russian).
7. Yu. I. Sirotin and M. P. Shaskolskaya, *Osnovy Kristallofiziki* [Basics of Crystal Physics] (Moscow: Nauka: 1975) (in Russian).
8. A. A. Dyshekov, *Tech. Phys. Lett.*, **44**, Iss. 10: 902 (2018).
9. N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner, and M. M. Smirnov, *Osnovnye Differentsialnye*

Uravneniya Matematicheskoy Fiziki [Basic Differential Equations of Mathematical Physics] (Moscow: Gosud. Izd-vo Fiz.-Mat. Lit.: 1962) (in Russian).