

STRUCTURE AND PROPERTIES OF NANOSCALE AND MESOSCOPIC MATERIALS

PACS numbers: 25.75.Nq, 71.27.+a, 71.30.+h, 72.80.Ga, 81.30.Hd

Зонна структура Діракових матеріалів із Габбардовою взаємодією

I. М. Карнаухов, К. Г. Левчук

*Інститут металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України,
бульв. Академіка Вернадського, 36,
03142 Київ, Україна*

Вивчено поведінку електронної рідини, визначеної на гексагональній і трикутній ґратницях з Габбардовим відштовхуванням у випадку напівзаповненої зони. Показано, що у полі сильної взаємодії відбувається фазовий перехід Мотта–Габбарда, основною особливістю якого у стані ізолятора є подвоєння комірки ґратниці. У стані діелектрика з напівзаповненням ферміони з імпульсами k і $k + \pi$ пов'язані через ефективне λ -поле. Щільність у спектрі квазічастинкових збуджень відкривається та відбувається фазовий перехід Мотта за критичного значення Габбардового відштовхування U_c ($U_c = 3,904$ та $U_c = 5,125$ — це розрахункові значення для гексагональної та трикутної ґратниць відповідно). Залежно від величини Габбардової взаємодії розраховано величину щільності у спектрі та енергію основного стану. Запропонований підхід універсальний, оскільки його можна реалізовувати незалежно від розмірності системи, типу і симетрії ґратниці.

Ключові слова: перехід Мотта, Габбардова взаємодія, гексагональна і трикутна ґратниці, ізолятор, фазовий перехід.

The behaviour of fermion liquid defined on hexagonal and triangular lattices with short-range repulsion at half filling is studied. In strong coupling limit, the Mott–Hubbard phase state is presented; the main peculiarity of insulator state is a doubled cell of the lattices. In the insulator state at half filling fermions with momenta k and $k + \pi$ are coupled via the effective λ -field, the gap

Corresponding author: Kateryna Hryhorivna Levchuk
E-mail: kgl.imp.nan@gmail.com

*G. V. Kurdyumov Institute for Metal Physics of the N.A.S. of Ukraine,
36 Academician Vernadsky Blvd., UA-03142 Kyiv, Ukraine*

Citation: I. M. Karnaukhov and K. H. Levchuk, Electronic Band Structure of Dirac Materials with Hubbard Interaction, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **44**, No. 5: 565–585 (2022) (in Ukrainian). DOI: [10.15407/mfint.44.05.0565](https://doi.org/10.15407/mfint.44.05.0565)

in the spectrum of quasi-particle excitations opens and the Mott phase transition is occurred at a critical value of the one-site Hubbard repulsion U_c ($U_c = 3.904$ and $U_c = 5.125$ are calculated values for hexagonal and triangular lattices, respectively). Depending on the magnitude of the short-range repulsion, the gap in the spectrum and the energy of the ground state are calculated. The proposed approach is universal; it is implemented for an arbitrary dimension and symmetry of the lattice for fermions models with short-range repulsion.

Key words: the Mott phase transition, Hubbard interaction, hexagonal and triangular lattices, insulator, phase transition.

(Отримано 2 лютого 2022 р.)

1. ВСТУП

Варто зазначити, що фазовий перехід Мотта в гексагональній ґратниці з Габбардовою взаємодією інтенсивно досліджують за допомогою числових розрахунків [1–7]. На жаль, ці обчислення не дозволяють прийти до висновку про безспіновий аналог цієї моделі з Габбардовим відштовхуванням безспінових ферміонів, що розміщені на сусідніх вузлах ґратниці. Моделювання, здійснене методом Монте-Карло різними авторами, дає результат для критичного значення Габбардової взаємодії, за якого відбувається фазовий перехід Мотта–Габбарда, дорівнює приблизно 4. Який саме фазовий перехід (першого чи другого роду) однозначно не встановлено! Незважаючи на велику зацікавленість до графену та матеріалів на його основі, фазовий перехід Мотта в моделю із взаємодією між найближчими сусідами на гексагональній ґратниці детально не вивчено. Нині нема відповіді на запитання: «За якого значення взаємодії між найближчими сусідами відкривається щілина у спектрі?». Необхідно знайти відповідь на це нагальне питання, оскільки стабільність стану графену (зі спектром Дірака у напівметалічному стані) також визначається відштовхуванням між ферміонами, розміщеними на найближчих сусідніх вузлах ґратниці.

Твердження, що симетрія захищає безщілинний фазовий стан, не можна вважати аргументом, водночас необхідно пам'ятати, що фаза ізолятора реалізується за рахунок Габбардового відштовхування. Особливості фазового переходу Мотта–Габбарда на трикутній ґратниці вивчено недостатньо (див. чисельні розрахунки в [8]). Проблема ще більше ускладнюється за тієї обставини, що у даному випадку мова йде про систему за наявності ефекту фрустрації. У нещодавніх роботах ми показали, що подвоєння комірки у разі фазового переходу є ключем до розуміння природи фазового переходу Мотта у взаємодійній електронній рідині, який визначають для різноманітних ґратниць та різних розмірностей системи [9–11].

2. ЗОННА СТРУКТУРА ДІРАКОВИХ МАТЕРІАЛІВ З ГАББАРДОВОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Нами проаналізовано фазовий перехід Мотта–Габбарда ферміонної рідини, заданий в гексагональній і трикутній ґратницях під дією Габбардового відштовхування. Ця проблема фізично важлива, оскільки графен має гексагональну структуру, а електронна рідина, що взаємодіє на трикутній ґратниці, володіє ефектом фрустрації. Дослідження фазового переходу Мотта надзвичайно корисний для розуміння поведінки сильнокорельованих систем [12–15].

Незважаючи на навидовижу багату історію, дослідження фізичної природи або сценарію фазового переходу Мотта залишаються суперечливими. Навіть для найпростішого моделю Габбарда аналітично точне рішення може бути знайдено лише для одновимірної системи. Що стосується дво- і тривимірних систем, то задача визначення основного стану за допомогою такого моделю, коли Габбардове відштовхування $U \rightarrow \infty$, є надзвичайно складною в математичному відношенні проблемою. Фактично нині точна відповідь на це запитання відома лише для випадку одновимірної системи з напівзаповненою зоною.

У проведеному дослідженні наведено рішення однієї з важливих проблем: визначаємо сценарій фазового переходу Мотта–Габбарда та з'ясовуємо як відбувається цей фазовий перехід. У точці фазового переходу щільна відкривається за умови напівзаповнення, зазначений фазовий перехід аналогічний переходу Пайєрлса. Ефективне λ -поле визначається невідомою фазою. Ми визначили цю фазу, вона дорівнює π , що відповідає подвоєнню комірки. Однак мова не йде про вплив домішок на стабільність фазового стану.

3. РОЗРОБКА ДВОВИМІРНОГО МОДЕЛЮ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ФАЗОВОГО СТАНУ ЕЛЕКТРОННОЇ РІДИНИ НА РІЗНИХ ҐРАТНИЦЯХ З УРАХУВАННЯМ ГАББАРДОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ

3.1. Метода розрахунку фазового стану електронної рідини

Будемо враховувати тільки вклад найближчих сусідів у формування енергетичних зон, тоді гамільтоніан у наближенні сильного зв'язку, визначений на двовимірній (гексагональній або трикутній) ґратниці, містить локальну Габбардову взаємодію і приймає вигляд:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} - \mu \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_j n_{j,\sigma}, \quad (1)$$

де t_{ij} — інтеграл перестрибування між найближчими сусідами, який також визначає ймовірність переходу-«стрибка» між сусідніми ато-

мами (атомами з різних підґратниць у випадку графену); $c_{j,\sigma}^\dagger(c_{j,\sigma})$ — оператори Фермі народження (знищення) електронів, визначені на вузлі j ґратниці, зі спіном $\sigma = \uparrow, \downarrow$; U — значення локальної Габбардової взаємодії, що визначається оператором густини $n_{j,\sigma} = c_{j,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$ — числовим оператором, який підраховує кількість електронів зі спіном σ на вузлі j ґратниці; μ — хемічний потенціал.

Для гексагональної ґратниці у випадку напівзаповнення хемічний потенціал μ дорівнює нулю, а у випадку трикутної ґратниці він відрізняється від нуля у безщільному стані.

Сума $\langle i, j \rangle$ пробігає всі пари найближчих сусідів на стільниковій ґратниці. Гамільтоніян (1) є сумою трьох складових, які можна інтерпретувати так: перша

$$\mathcal{H}_{\text{kin}} = - \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$$

визначає кінетичну енергію перестрибування електронів між найближчими сусідами. Оператор $c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$ знищує електрон на вузлі j на першому етапі та створює електрон на вузлі i на другому етапі. Таким чином, у сукупності оператор описує рух електрона зі спіном σ від вузла j до вузла i , а t_{ij} — кількість енергії, необхідної для здійснення стрибка; друга

$$\mathcal{H}_{\text{rep}} = U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}$$

враховує внутрішньовузельне відштовхування U електронів на одному вузлі j . Вона відповідає потенціальній енергії Габбардової взаємодії електронів. Оскільки не може бути більше одного електрона з визначеним спіном на кожному вузлі ґратниці, числові оператори $n_{j,\sigma}$ можуть приймати значення 0 або 1. Таким чином, добуток $n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}$ приймає значення 1 лише, якщо у вузлі j знаходяться два електрони (один зі спіном \uparrow і один зі спіном \downarrow), тому цей член описує притягання ($U < 0$) або відштовхування ($U > 0$) двох електронів; третя

$$\mathcal{H}_\mu = -\mu \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_j n_{j,\sigma},$$

— це додатковий оператор, пов'язаний з енергією хемічного потенціалу μ . Добуток μ і суми

$$\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_j n_{j,\sigma} = \sum_j (n_{j\uparrow} + n_{j\downarrow}),$$

що підраховує загальну кількість електронів в системі, є енергією, яка необхідна для введення електронів у систему. Таким чином, третя складова описує повну енергію, необхідну для зведення усіх електронів, що існують, у стан системи. Вона зростає зі збільшенням кількості електронів, водночас за рахунок мінімізації енергії намагається зберег-

ти невелику загальну кількість електронів. Для канонічних систем, які ми вивчаємо у даній роботі, цей член приводить до зсуву енергії.

Саме врахування другої складової дозволяє описати більш реалістичний модель, який добре пояснює перехід Мотта (з провідного стану в діелектричний, що супроводжується утворенням (або збільшенням) щілини).

Для подальших досліджень розглянемо випадок, коли інтеграл перескоку між усіма найближчими сусідами $t_{ij} = 1$, тоді йому відповідає ширина зони $W = 2zt$, де z — кількість найближчих сусідів.

Оскільки звести гамільтоніян до діагонального виду можливо тільки для невеликої кількості вузлів N , необхідно скористатись чисельними методами. Зокрема, в нашій роботі застосовано детермінантну квантову методу Монте-Карло. Отже, слід матриці статистичної суми необхідно записати як визначник. Для цього гамільтоніян повинен складатись з білінійних членів виду $c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$, що не виконується для Габбардового члена $n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow}$. Тоді задача полягає у тому, щоб записати член четвертого степеню $c_{i\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow} c_{i\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow}$ білінійним способом. Один зі способів звести гамільтоніян (1) до такого вигляду — використати перетворення Габбарда–Стратоновича

$$\exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2a} - ixy\right) dy, \quad (2)$$

яке лінеаризує квадратичний член x^2 в експоненті за рахунок нової степені y , лінійно пов'язаної з x .

Скориставшись перетворенням Габбарда–Стратоновича (2), перевизначимо другу складову гамільтоніяна (1) — енергію взаємодії між найближчими сусідами. Введемо позначення $\chi_j^\dagger = c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}$, $\chi_j = c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow}$ та зведемо зазначену складову гамільтоніяна (1) до квадратичної форми

$$\mathcal{H}_{\text{rep}} = U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} = U \sum_j c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow} c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\downarrow} = -U \sum_j c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow} c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow} = -U \sum_j \chi_j^\dagger \chi_j. \quad (3)$$

Тоді відповідну електронну статистичну суму системи для заздалегідь визначеного гамільтоніяна можна записати так

$$Z = \exp(-\beta \mathcal{H}) = \exp\left[-\beta(\mathcal{H}_{\text{kin}} + \mathcal{H}_\mu - U \sum_j \chi_j^\dagger \chi_j)\right], \quad (4)$$

де $\beta = 1/(k_B T)$, k_B — стала Больцманна, T — температура системи в її рівновазі.

Виконаємо перетворення Габбарда–Стратоновича (2) на квадратичному члені $\chi_j^\dagger \chi_j$, застосувавши комплексну заміну $a \leftarrow U/2$, $x \leftarrow 2\chi_j i$, $y \leftarrow \lambda_j$ в (3)

$$\exp(U \chi_j \chi_j^\dagger) = \frac{1}{\sqrt{\pi U}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_j \lambda_j^*}{U} + \lambda_j \chi_j^\dagger + \lambda_j^* \chi_j\right) d\lambda_j \quad (5)$$

і одержимо наступний вираз для статистичної суми заздалегідь визначеного гамільтоніяна (1)

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\pi U}} \exp \left[-\beta \left(\mathcal{H}_{\text{kin}} + \mathcal{H}_{\mu} + \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j \lambda_j^*}{U} - \lambda_j \chi_j^{\dagger} - \lambda_j^* \chi_j \right) d\lambda_j \right) \right], \quad (6)$$

Отже, ефективний гамільтоніан має вигляд

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H}_0 + \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j \lambda_j^*}{U} - \lambda_j \chi_j^{\dagger} - \lambda_j^* \chi_j \right) d\lambda_j, \quad (7)$$

Ефективне поле λ_j ми запропонували задати у вигляді $\lambda_j = \lambda e^{iqj}$, де λ — амплітуда, а q — фаза. Фазу визначаємо з умови мінімуму вільної енергії, а величина амплітуди визначає момент відкриття щілини, фазового переходу Габбарда–Мотта та величину щілини.

У квантовій теорії середнього поля підсумовування частот Мацубари є сумою за дискретними уявними частотами. Вона має наступний вигляд

$$s = -\frac{1}{\beta} \sum_n g(i\omega_n). \quad (8)$$

Метода оцінки підсумовування частот Мацубари полягає у використанні вагової функції Мацубари $n(i\omega) = (e^{i\beta\omega} + 1) - 1$ — функції розподілу Фермі–Дірака, яка має прості полюси, розташовані точно в $i\omega$. За допомогою вагової функції підсумовування формулу (8) можна замінити контурним інтегралом, що оточує уявну вісь

$$s = -\frac{1}{2\pi\beta} \oint g(i\omega) n(i\omega) d\omega. \quad (9)$$

Знаходимо прості полюси на частотах ферміонів $i\omega_n$ із функції зважування Мацубари $n(i\omega_n)$

$$e^{i\beta\omega_n} = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = (2n+1)\pi/\beta. \quad (10)$$

З урахуванням (1) і (3) дія має наступний вигляд

$$S = -k_B \sum_{\mathbf{k}} \sum_n \sum_{\gamma=1,2} \ln \left[\omega_n^2 + \varepsilon_{\gamma}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right] + \frac{|\lambda|^2}{U}, \quad (11)$$

де $\omega_n = T(2n+1)\pi$ — частоти Мацубари, квазічастинкові збудження $\pm\varepsilon_{\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ ($\gamma = 1, 2$) визначають ферміонні стани у λ -полі з ефективним гамільтоніяном (7), права частина (11) враховує подвоєння комірки, а ліва частина — ступінь свободи обертання. У наближенні сидлової точки λ є розв'язком наступного рівняння $\partial S / \partial \lambda = 0$. У разі

напівзаповнення рівняння, що відповідає мінімальній дії S , зводиться до такого за $T = 0$ К

$$\frac{2|\lambda|}{U} = -\frac{1}{2} \sum_{\gamma=1,2} \int \frac{\partial \varepsilon_{\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{\partial |\lambda|} d\mathbf{k}. \quad (12)$$

Рівняння (12) дозволяє визначити ефективну сталу λ для заданого значення Габбардової взаємодії U .

3.2. Модель електронної рідини на гексагональній ґратниці

Графен має двовимірну кристалічну структуру, вибудовану з атомів вуглецю, які розміщені у вузлах ґратниці за зразком «бджолиних стільників» (рис. 1, а). Структура графену утворена двома еквівалентними трикутниками підґратниці — в одній атоми «сорт» А, а в іншій — атоми «сорт» В, які взаємно проникають одна в одну. Атоми однієї підґратниці (червоні кульки) позначено літерою А, а атоми іншої підґратниці (зелені кульки) позначено літерою В (рис. 1, б). Вектори трьох найближчих сусідів до цих атомів, що з'єднують даний атом вуглецю з однією підґратниці з трьома найближчими сусідами, що належать іншій підґратниці, визначимо наступним чином

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(0, 0); \quad \mathbf{a}_2(\sqrt{3}/2, -1/2); \quad \mathbf{a}_3(-\sqrt{3}/2, -1/2); \\ \mathbf{b}_1(\sqrt{3}/2, 1/2); \quad \mathbf{b}_2(0, 0); \quad \mathbf{b}_3(-\sqrt{3}/2, 1/2). \end{aligned} \quad (13)$$

На рисунку 1, в показано вектори оберненої ґратниці

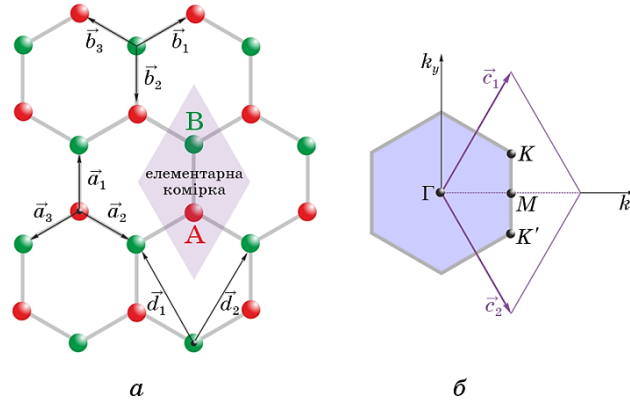


Рис. 1. Кристалічна структура графену як сукупність трикутних підґратниць А і В (а) та Бріллюенова зона (б), що є правильним шестикутником.

Fig. 1. Crystal structure of graphene as a set of triangular sublattices A and B (a) and the Brillouin zone (b), which is a regular hexagon.

$$\mathbf{c}_1 = 2\pi(1/3, \sqrt{3}/3); \quad \mathbf{c}_2 = 2\pi(1/3, -\sqrt{3}/3), \quad (14)$$

на яких побудовано примітивну комірку оберненої ґратниці, Бріллюєнову зону (фіолетовий правильний шестикутник та точки симетрії: Γ — центр зони; K і K' — «Діракові» точки в кутах Бріллюєнової зони; M розташована в центрі сторони шестикутника. Точки Дірака утворюють шестикутну ґратницю, аналогічну ґратниці графену.

Оскільки ефективне поле λ_j задане у вигляді $\lambda_j = \lambda \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{j})$, тому розв'язок для λ -поля не змінює кіральну симетрію моделю, якщо $\mathbf{q}(0, 0)$, $\mathbf{q}(2\pi/\sqrt{3}, 0)$ або $\mathbf{q}(0, 2\pi)$. Чисельні розрахунки гамільтоніяна (1), визначеного на гексагональній і трикутній ґратницях, показали, що тривіальний розв'язок $\mathbf{q}(0, 0)$ описує невзаємодійну електронну рідину зі зміщеними гілками квазічастинкових збуджень. Тому далі розглянемо стан електронної рідини, коли $\mathbf{q}(0, \pi)$, що визначає новий фазовий стан з перенормованим спектром.

Враховавши рішення, коли $\mathbf{q}(2\pi/\sqrt{3}, 0)$ або $\mathbf{q}(0, 2\pi)$, розглянемо розв'язок гамільтоніяна (7), який визначений на гексагональній ґратниці як низькоенергетичний ефективний гамільтоніан \mathcal{H}_{eff} . Гамільтоніан графену має вигляд

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^\dagger \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 & -w(\mathbf{k}) \\ -w^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а ефективний гамільтоніан, що визначається λ -полем, напишемо так

$$\mathcal{H}_{eff} = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^\dagger \mathcal{H}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \Psi_{\mathbf{k},\mathbf{q}},$$

$$\mathcal{H}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & -w(\mathbf{k}) & \lambda & 0 \\ -w^*(\mathbf{k}) & 0 & 0 & \lambda^* \\ \lambda^* & 0 & 0 & -w(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \\ 0 & \lambda & -w^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де $\Psi_{\mathbf{k}} = (c_{A,\sigma\mathbf{k}}^\dagger, c_{B,\sigma\mathbf{k}}^\dagger)$ і $\Psi_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = (c_{A,\sigma\mathbf{k}}^\dagger, c_{B,\sigma\mathbf{k}}^\dagger, c_{A,-\sigma(\mathbf{k}+\mathbf{q})}^\dagger, c_{B,-\sigma(\mathbf{k}+\mathbf{q})}^\dagger)$ — хвильові функції, \mathbf{k} — хвильовий вектор,

$$w(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_j) = 1 + e^{i(k_x \sqrt{3}/2 - k_y/2)} + e^{-i(k_x \sqrt{3}/2 + k_y/2)} =$$

$$= 1 + 2e^{-ik_y/2} \cos(k_x \sqrt{3}/2);$$

$$w^*(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_j) = e^{i(k_x \sqrt{3}/2 + k_y/2)} + 1 + e^{-i(k_x \sqrt{3}/2 - k_y/2)} =$$

$$= 1 + 2e^{ik_y/2} \cos(k_x \sqrt{3}/2);$$

$$w(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 1 + 2e^{-i(k_y + q_y)/2} \cos[(k_x + q_x)\sqrt{3}/2];$$

$$w^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 1 + 2e^{i(k_y + q_y)/2} \cos[(k_x + q_x)\sqrt{3}/2],$$

$$i w(k_x + 2\pi/\sqrt{3}, k_y) = w(k_x, k_y + 2\pi).$$

У випадку напівзаповнення хемічний потенціал дорівнює нулю для довільних λ і \mathbf{q} , а спектр збудженої квазічастинки $\pm \varepsilon_{1,2}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ симетричний відносно нульової енергії. Електронний спектр безспінового графену згідно (15)

$$\varepsilon_{1,2}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \pm [3 + 2 \cos((k_x + q_x)\sqrt{3}) + 4 \cos((k_x + q_x)\sqrt{3}/2) \cos((k_y + q_y)/2)]^{1/2}. \quad (17)$$

Енергія збудженого спектру з урахуванням ефективного поля λ_j

$$E(U(\lambda)) = \frac{1}{2} \iint_{k_x, k_y} \sum_{\gamma=1,4} \varepsilon_{\gamma} f_F(\varepsilon_{\gamma}) dk_x dk_y + \frac{\lambda^2}{U}, \quad (18)$$

де $f_F(\varepsilon_{\gamma}) = (e^{\beta \varepsilon_{\gamma}} + 1)^{-1}$ — функція розподілу частинок (функція Фермі).

Як відомо, електронний спектр графену (17) без урахування взаємодії між ферміонами має дві гілки та утворює просторовий шестикутник, обмежений першою Бріллюєнвою зоною (рис. 2). Він розміщений відносно вертикальної осі на рівні енергії Фермі. Водночас ці поверхні є структурою валентної зони (всередині Бріллюєнвої зони — помаранчева на рис. 2) і зони провідності (за межами Бріллюєнвої зони — блакитна на рис. 2), котрі знаходяться у контакті в шести точках Дірака (в кутах першої Бріллюєнвої зони). Валентна зона повністю заповнена ферміонами, а зона провідності порожня. Рівень Фермі знаходиться у точках дотику цих зон.

Введення ефективного λ -поля дозволило вилучити виродження

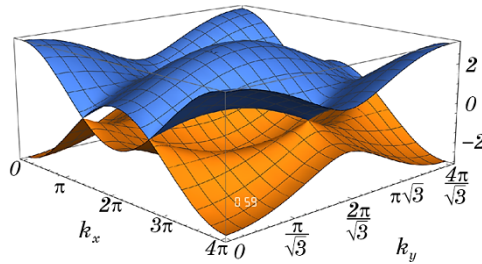


Рис. 2. Спектр ферміонів, розрахований на гексагональній ґратниці без урахування ефективного поля (безщільний стан).

Fig. 2. The spectrum of fermions calculated on a hexagonal lattice without taking into account the effective field (gapless state).

електронного спектра за спіном (16) і одержати енергетичний спектр

$$\varepsilon_{1,2}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left(|w(\mathbf{k})|^2 + |w(\mathbf{k} + \mathbf{q})|^2 + 2|\lambda|^2 \pm \sqrt{\left(|w(\mathbf{k})|^2 - |w(\mathbf{k} + \mathbf{q})|^2 \right)^2 + 4|\lambda|^2 |w(\mathbf{k}) + w(\mathbf{k} + \mathbf{q})|^2} \right) \quad (19)$$

Лише для кожної окремої пари значень \mathbf{q} -вектора в енергетичному спектрі (19) зберігається його кіральність. За половинного заповнення спектр квазічастинкових збуджень $\varepsilon_{1,2}^2(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ симетричний відносно нульової енергії для довільного λ , він має чотири різних гілки, що виникли в результаті подвоєння комірки у фазі ізолятора. Поведінка низької енергії гілки спектра визначають фазовий стан електронної рідини. Таким чином, за $0 < \lambda < 1$ спектр безщільний, за $\lambda_s = 1$ відкривається щілина, величина щілини $\Delta = 2(\lambda - 1)$.

Під дією λ -поля комірка ґратниці подвоюється і формується чотири різних гілки квазічастинкових збуджень. У безщільній фазі зі зростанням λ від 0 до 1 низькоенергетичний спектр перебудовується. Відстані між трьома точками Дірака–Бріллюена на одній прямій по осі ординат (k_y) для кожної з пар поступово зближуються по осі абсцис (k_x) і, коли $\lambda_s = 1$, ці точки Дірака вишиковуються в лінію. Таким чином, контакт між низькоенергетичними зонами в момент відкриття щілини відбувається по двох паралельних лініях (рис. 3).

Величина щілини Δ визначається величиною взаємодії U . З подальшим зростанням амплітуди ефективного поля λ відбувається перехід Мотта–Габбарда, електронна рідина переходить у стан діелектрика, а щілина збільшується (рис. 4).

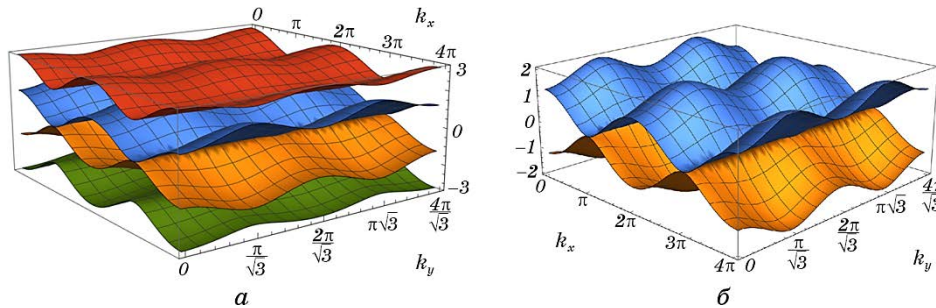


Рис. 3. Повний (а) та низькоенергетичний (б) спектри ферміонів, розраховані на гексагональній ґратниці з урахування ефективного поля ($\lambda_s = 1$). Стан, коли щілина відкривається.

Fig. 3. Full (a) and low-energy (b) spectra of fermions calculated on a hexagonal lattice taking into account the effective field ($\lambda_s = 1$). The condition when a gap opens.

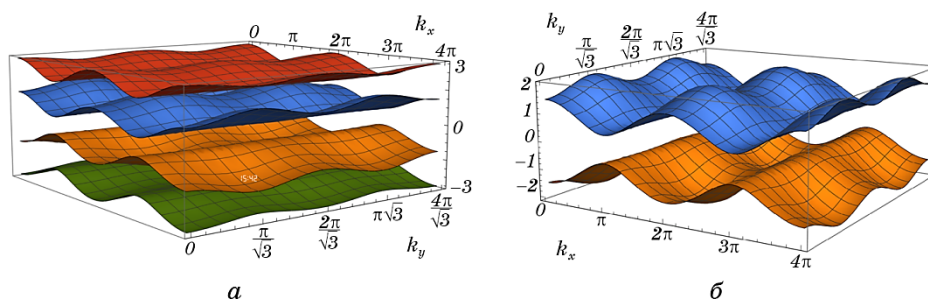


Рис. 4. Повний (а) та низькоенергетичний (б) спектри ферміонів, розраховані на гексагональній ґратниці з урахування ефективного поля ($\lambda = 1,5$). Величина щілини $\Delta = 1$.

Fig. 4. Full (a) and low-energy (b) spectra of fermions calculated on a hexagonal lattice taking into account the effective field ($\lambda = 1.5$). The size of the gap is $\Delta = 1$.

3.3. Модель електронної рідини на трикутній ґратниці

У цьому підрозділі розглянемо поведінку електронної рідини, яка описується гамільтонієм (1), заданим на трикутній ґратниці.

Розглянемо систему взаємодійних електронів у трикутній ґратниці (рис. 5). Така ґратниця має ефект фрустрації — явище, за якого геометричні властивості кристалічної ґратниці такі, що через наявність протидійних міжатомових сил неможлива одночасна мінімізація енергії взаємодії (рис. 5, б). Це може привести до сильно виродженого базового стану, за якого система буде володіти ненульовою ентропією навіть за нульової температури. Тобто, система не може бути повністю «заморожена», оскільки вона не має єдиного базового стану, тому рух на молекулярному рівні продовжується навіть за відсутності надходження енергії.

Вектори шести найближчих сусідів (рис. 5, а) до даного атома визначимо наступним чином

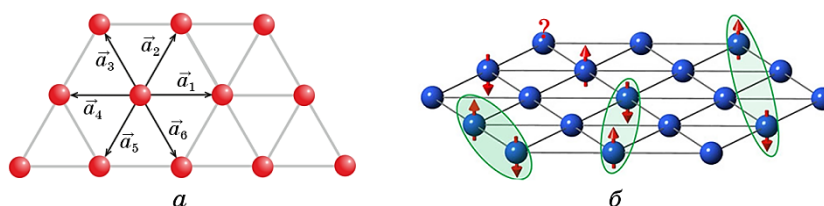


Рис. 5. Кристалічна структура (а) та ефект фрустрації (б) трикутної ґратниці.

Fig. 5. Crystal structure (a) and frustration effect (b) of a triangular lattice.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(1, 0); \quad \mathbf{a}_2(1/2, \sqrt{3}/2); \quad \mathbf{a}_3(-1/2, \sqrt{3}/2); \\ \mathbf{a}_4(-1, 0); \quad \mathbf{a}_5(-1/2, -\sqrt{3}/2); \quad \mathbf{a}_6(1/2, -\sqrt{3}/2). \end{aligned} \quad (20)$$

Врахувавши рішення, коли $\mathbf{q}(2\pi, 0)$ або $\mathbf{q}(0, 2\pi/\sqrt{3})$, розглянемо розв'язок гамільтоніана (7), який визначений на трикутній ґратниці як ефективний гамільтоніан \mathcal{H}_{eff} .

Акцентуємо увагу на фазовому стані електронної рідини за половинного заповнення. Значення $\mathbf{q}(2\pi, 0)$ і $\mathbf{q}(0, 2\pi/\sqrt{3})$ не порушують кіральну симетрію фазових станів, що розглядаються.

У наближенні сильного зв'язку з урахуванням перескоку тільки між найближчими сусідами спектр одночастинних збуджень має вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) = w(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^6 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_j) = e^{ik_x} + e^{-ik_x} + e^{i(k_x + k_y\sqrt{3})/2} + e^{-i(k_x + k_y\sqrt{3})/2} + \\ + e^{i(-k_x + k_y\sqrt{3})/2} + e^{i(k_x - k_y\sqrt{3})/2} = 2 \cos k_x + 4 \cos(k_x/2) \cos(k_y\sqrt{3}/2). \end{aligned} \quad (21)$$

де \mathbf{k} — хвильовий вектор і $w(k_x + 2\pi, k_y) = w(k_x, k_y + 2\pi/\sqrt{3})$.

Ефективний гамільтоніан трикутної ґратниці, що визначається λ -полем, записується у вигляді

$$\mathcal{H}_{eff} = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^\dagger \mathcal{H}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \Psi_{\mathbf{k},\mathbf{q}}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -w(\mathbf{k}) & \lambda \\ \lambda & -w(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

де $\Psi_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = (c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{-\sigma(\mathbf{k}+\mathbf{q})}^\dagger)$ — хвильові функції, \mathbf{k} — хвильовий вектор, $w(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 2 \cos(k_x + q_x) + 4 \cos((k_x + q_x)/2) \cos((k_y + q_y)\sqrt{3}/2)$.

Скориставшись тим самим формалізмом, що і для гексагональної ґратниці, розрахуємо фазовий перехід Мотта–Габбарда в моделю з гамільтоніаном (1). Спектр збудженої квазічастинки $\pm \varepsilon_{1,2}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ асиметричний відносно хемічного потенціалу. Електронний спектр трикутної ґратниці згідно (22)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \left(w(\mathbf{k}) + w(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \pm \sqrt{[w(\mathbf{k}) - w(\mathbf{k} + \mathbf{q})]^2 + 4\lambda^2} \right) = \\ = -2 \cos k_x \pm \sqrt{16 \cos^2(k_x\sqrt{3}) \cos^2(k_y\sqrt{3}/2) + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Хвильовий вектор \mathbf{q} має нетривіальні розв'язки: $\mathbf{q}(2\pi, 0)$ і $\mathbf{q}(0, 2\pi/\sqrt{3})$, які відповідають подвоєнню комірки. Енергія збудженого спектра без урахування ефективного поля λ_j

$$E(U(\lambda)) = \iint \sum_{k_x, k_y} \varepsilon_\gamma f_F(\varepsilon_\gamma) dk_x dk_y + \frac{\lambda^2}{U} + \mu, \quad (24)$$

де $f_F(\varepsilon_\gamma) = [\exp(\beta(\varepsilon_\gamma - \mu)) + 1]^{-1}$ — функція розподілу частинок (функція Фермі).

Досліджено фазовий перехід у напівзаповненій електронній рідині на трикутній ґратниці під дією локального Габбардового відштовхування U . Потенціал взаємодії між найближчими сусідами приводить до якісної зміни електронного спектра. Якщо $\lambda = 0$ енергетична зона має одну гілку (рис. 6), яка з урахуванням локального Габбардового відштовхування перебудовується у дві гілки, тобто енергетичний спектр подвоюється (рис. 7). В ізоляторному стані ці дві гілки спектра розділяє щілина (рис. 8). Спектр залишається асиметричним відносно нульової енергії як у безщілинному стані (рис. 7), так і в щілинному стані (рис. 8).

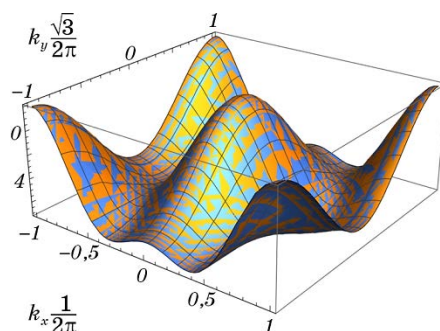


Рис. 6. Спектр електронів, розрахований на трикутній ґратниці без урахування ефективного поля (безщілинний стан).

Fig. 6. The spectrum of electrons calculated on a triangular lattice without taking into account the effective field (gapless state).

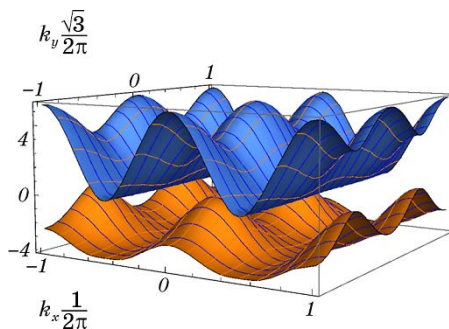


Рис. 7. Спектр електронів, розрахований на трикутній ґратниці з урахування ефективного поля ($\lambda_c = 2$). Стан, коли щілина відкривається.

Fig. 7. Spectrum of electrons calculated on a triangular lattice taking into account the effective field ($\lambda_c = 2$). The condition when a gap opens.

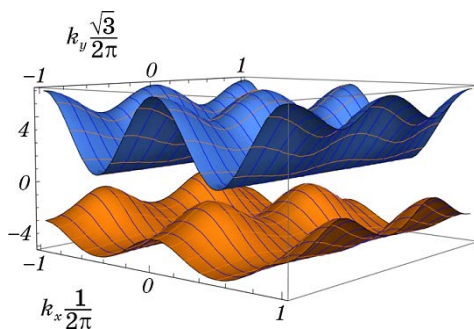


Рис. 8. Спектр електронів, розрахований на трикутній ґратниці з урахуванням ефективного поля ($\lambda = 2,5$). Величина щілини $\Delta = 1$.

4. ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХОДУ МОТТА–ГАББАРДА НА ДВОВИМІРНИХ КРИСТАЛІЧНИХ ҐРАТНИЦЯХ

4.1. Поведінка електронної рідини на гексагональній ґратниці

Проведені чисельні розрахунки і дослідження показали, що поведінка електронної рідини гексагональної ґратниці (рис. 9) нетривіальна поблизу точки фазового переходу в ізоляторному стані. Рівняння (12) пов'язує значення λ і U , так U має по два розв'язки, коли $3,904 < U < 5,767$ ($\lambda \leq 2,484$), і один розв'язок, коли $U > 5,767$ ($\lambda > 2,484$). Як зазначалось вище, щілина відкривається, коли $\lambda_s = 1$, цій точці відповідає Габбардове відштовхування $U_s = 4,108$.

Отже, щілина Δ з'являється внаслідок подвоєння комірки гексагональної ґратниці (в елементарній комірни графену у діелектричній фазі перебувають 4 атоми) у випадку зміни фази ефективного поля на одному з двох напрямків $\mathbf{q}(0, 2\pi)$ або $\mathbf{q}(2\pi/\sqrt{3}, 0)$. Коли λ змінюється від 1,110 до 0, перший розв'язок для U змінюється в інтервалі $4,108 < U < 5,767$, чому відповідає безщілинний стан (зелена крива на рис. 9–11). Для $\lambda > 1$ другий розв'язок описує стан ізолятора (див. рис. 9).

За $T = 0$ К стабільний фазовий стан визначається мінімальною енергією електронної рідини, її фазовий стан визначається енергією основного стану для різних значень U . Розрахунки густини енергії основного стану показано на рис. 11: крива високої енергії описує напівметалічний стан (зелена крива на рис. 9–11), нестабільний стан (синя крива на рис. 9–11), а крива низької енергії визначає стабільний стан ізолятора (червона крива на рис. 9–11).

Ми одержали, що стан ізолятора на інтервалі $1 < \lambda < 1,11$ нестабільний (синя крива на рис. 9). Згідно розрахункам стабільний стан ізолятора починається з найнижчої точки Габбардового відштовхування, коли $U_c = 3,904$ (див. рис. 9). У цій точці величина щілини

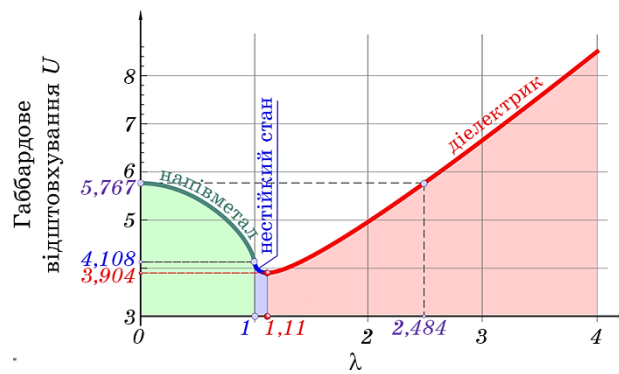


Рис. 9. Габбардова взаємодія U як функція λ , розрахована на гексагональній ґратниці.

Fig. 9. Hubbard interaction U as a function λ calculated on a hexagonal lattice.

дорівнює $\Delta_c = 0,22$ (рис. 10) — це мінімальне значення щілини, в границі U -нескінченність $\Delta \rightarrow U$. Зазвичай, перехід Мотта, розрахований на ґратницях з простою симетрією, — це фазовий перехід другого роду [2], [13], [14], але у гексагональній ґратниці фазовий перехід у стані діелектрика — перехід першого роду, коли $U_c = 3,904$.

Ми показали, що нетривіальне рішення для хвильового вектора \mathbf{q} відповідає мінімуму енергії моделі (12). За напівзаповнення електронна рідина на гексагональній ґратниці зі слабким Габбардовим відштовхуванням знаходиться у стійкому напівметалічному стані. На границі сильної взаємодії присутній фазовий стан діелектрика Мотта.

З числових розрахунків кластерної теорії збуджень моделі Габбарда, яка визначена на гексагональній ґратниці, випливає, що точка фазового переходу відповідає критичному значенню локальної Габбардової взаємодії U_c : $U_c = 3,78$ [1], $U_c = 3,869$ [3], $U_c = 4,5 \pm 0,5$ [4], у діапазоні 4–5 [5], найшвидше, значення U_c близьке до 4. Дивовижно, але одержана нами величина Габбардової взаємодії ($U_c = 3,904$) збіглася з чисельними результатами інших авторів. А оскільки запропонована нами метода є частково аналітичною, то дозволяє також проаналізувати (зрозуміти) фізику переходу Мотта–Габбарда.

До того ж, природу фазового переходу між цими двома станами до цих пір не встановлено; питання про порядок фазового переходу залишається відкритим. Згідно [2] перехід між фазовими станами напівметал і діелектрик здійснюється через щілинну спінову рідинну фазу в режимі проміжної взаємодії $3,5 < U < 4,3$. У даному випадку цей перехід є фазовим переходом першого роду. Числові розрахунки інших авторів (див. наприклад [1, 3–6]) показують, що

має місце фазовий перехід другого роду.

4.2. Поведінка електронної рідини на трикутній ґратниці

На відміну від гексагональної ґратниці, у якій хемічний потенціал дорівнює нулю, у трикутній — хемічний потенціал монотонно спадає від максимального значення $\mu_0 = 0,842$, коли $\lambda = 0$, до нуля, коли $\lambda_c = 2$. Якщо $\lambda_c = 2$ щілина у спектрі відкривається і хемічний потенціал заморожується на нулі для довільного $\lambda \geq 2$ (рис. 12).

Як і в гексагональній ґратниці, поведінка електронної рідини нетривіальна поблизу точки фазового переходу ($\lambda_c = 2$, $U_c = 5,125$, $E_c = -1,951$). Згідно рівності (12) локальне Габбардове відштовхування

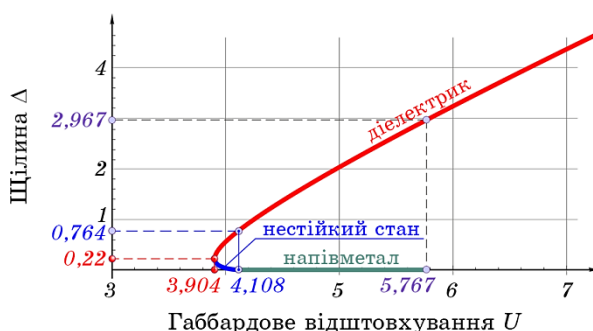


Рис. 10. Залежність величини щілини Δ від Габбардової взаємодії U , розрахованої на гексагональній ґратниці.

Fig. 10. The dependence of a gap size Δ on the Hubbard interaction U calculated on a hexagonal lattice.



Рис. 11. Залежність густини енергії основного стану E від величини Габбардової взаємодії U , розрахованої на гексагональній ґратниці.

Fig. 11. The dependence of the energy density of the ground state E on the magnitude of the Hubbard interaction U calculated on a hexagonal lattice.

U має два розв'язки (рис. 13), якщо $5,125 < U \leq 5,507$ ($\lambda \leq 2,211$) та один розв'язок, якщо $U > 5,507$ ($\lambda > 2,211$).

Але, якщо λ досягає значення $\lambda_c = 2$, щілина відкривається (рис. 14), в цей момент енергія дорівнює $E_c = -1,951$ (рис. 15). Коли λ змінюється від 2 до 0, перше рішення для U змінюється в інтервалі $5,125 < U < 5,507$, що відповідає безщілинному стану (зелена крива на рис. 13–15).

Для всіх $\lambda \geq 2$ щілина Δ відкривається і дорівнює $\Delta = 2(\lambda - 2)$, у результаті чого відбувається перехід Мотта у фазовий стан діелектрика (рис. 14). Коли $\lambda \geq 2$ друге рішення описує стан з розривом неперервності (червона крива на рис. 13–15).

Стійкий фазовий стан визначає мінімальна енергія електронної рідини. Розрахунки густини енергії основного стану показано на

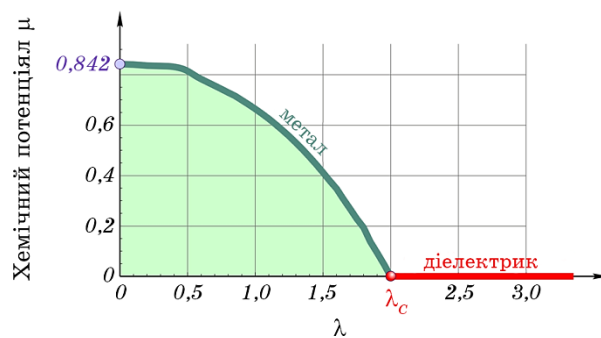


Рис. 12. Хемічний потенціал μ як функція λ , розрахованої на трикутній ґратниці.

Fig. 12. Chemical potential μ as a function λ calculated on a triangular lattice.

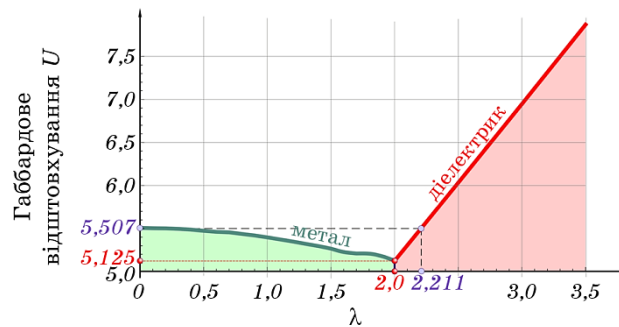


Рис. 13. Габбардова взаємодія U як функція λ , розрахована на трикутній ґратниці.

Fig. 13. Hubbard interaction U as a function of λ calculated on a triangular lattice.

рис. 15: крива високої енергії від $E_0 = -1,977$ до $E_p = -2,011$ описує нестабільний стан, крива з нижчою енергією визначає стабільний стан діелектрика. Згідно розрахункам стабільний стан ізолятора починається з точки відгалуження, коли $U_c = 5,125$ (див. рис. 13). У цій точці величина щілини дорівнює нулю (див. червону криву на рис. 14). Чисельні розрахунки фазового переходу Мотта–Габбарда з парамагнетного стану металу в стан діелектрика з подвоєною коміркою показує, що це фазовий перехід другого роду. Критичне зна-



Рис. 14. Залежність величини щілини Δ від Габбардової взаємодії U , розрахованої на трикутній ґратниці.

Fig. 14. The dependence of a gap size Δ on the Hubbard interaction U calculated on a triangular lattice.

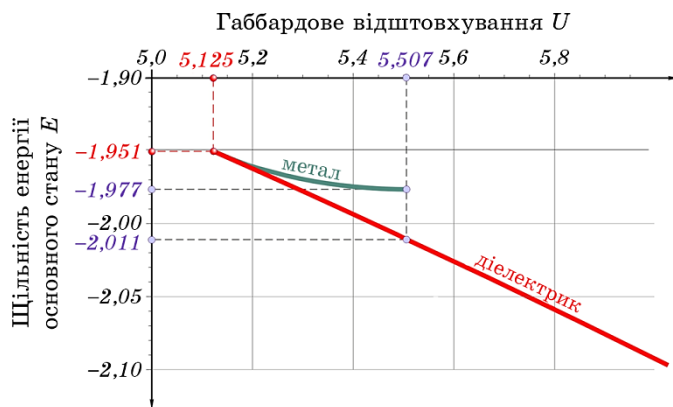


Рис. 15. Залежність густини енергії основного стану E від величини Габбардової взаємодії U , розрахованої на трикутній ґратниці.

Fig. 15. The dependence of the energy density of the ground state E on the magnitude of the Hubbard interaction U calculated on a triangular lattice.

чення взаємодії між найближчими сусідами дорівнює $U_c = 5,125$ (див. рис. 15).

Таким чином, фазовий перехід Мотта відбувається за одним сценарієм незалежно від симетрії ґратниці; а саме перехід із стану парамагнетного металу (або напівметалу в гексагональній ґратниці) у стан ізолятора, в якому елементарна комірка подвоюється. Фазова діаграма основного стану Габбардового моделю, яка задана на трикутній ґратниці, не враховує фазовий перехід в антиферромагнетний стан у розрахунках, поданих в [16, 17]. Чисельні розрахунки дають наступні значення критичних значень локального Габбардового відштовхування: $U_c = 7,5$ [16], $U_c = 7,4$ [17] у випадку фазового переходу з парамагнетного стану металу в стан немагнетного ізолятора.

Наші розрахунки показали, що фазовий перехід з парамагнетної металевої фази в діелектричну фазу відбувається з подвоєнням комірки, як і у випадку інших симетрій ґратниці та розмірності системи [2, 3, 5, 13, 14].

5. ВИСНОВКИ

У представлений роботі проведено дослідження однозонного двовимірного моделю Габбарда в рамках теорії наближення середнього поля *аналітичною метою* із застосуванням чисельних розрахунків. Поряд з цим, існує ціла низка досліджень такого ж моделю *числовою метою* кластерної теорії збуджень, що також обмежується розглядом взаємодії найближчих сусідів. За такою метою двовимірну ґратницю розбивають на кластери, що утворюють надґратницю. Методом точної діагоналізації визначають повний набір власних векторів та власних значень окремих кластерів.

Запропонований підхід, що поєднує аналітичну методу та чисельні розрахунки, універсальний, оскільки його можна реалізовувати незалежно від розмірності системи, типу і симетрії ґратниці.

Залежно від величини Габбардового відштовхування розраховано величину щільності у спектрі та енергію основного стану.

1. У випадку кінцевого значення взаємодії на вузлі $U > U_c$ і напівзаповнення електрони з різними імпульсами, зсунутими на π , утворюють щільовий спектр квазічастинкових збуджень.
2. Стабільний стан діелектрика характеризується подвоєнням комірки ґратниці, яке є універсальною характеристикою (для різних розмірностей систем, типів і симетрії ґратниці) стану діелектрика.
3. Розрахункові значення U_c ($U_c = 3,904$ для гексагональної і $U_c = 5,125$ для трикутної ґратниці) добре узгоджуються з числовими розрахунками моделю Габбарда на гексагональній ґратниці.
4. Дослідження показали, що в гексагональній ґратниці існує фазовий перехід Мотта–Габбарда першого роду з напівметалічного фазового стану в стан ізолятора, а у трикутній ґратниці — фазовий пе-

рехід другого роду. Водночас виникають запитання про фазову діаграму основного стану моделю Габбарда на трикутній ґратниці, оскільки фазовий стан ізолятора з подвоєнням комірки чисельно досі не досліджено.

Запропоновано підхід, що уможливило описати фазу Мотта–Габбарда, тобто перехід для моделей електронів із взаємодією між найближчими сусідами для довільних розмірностей системи, типу та симетрії ґратниці.

ПОДЯКИ

Роботу виконано за підтримки програм Національної академії наук України КПКВК 6541030 за відомчою тематикою «Самоорганізація структури, електронна будова та фізичні властивості новітніх металовмісних матеріалів» (державний реєстраційний № 0122U002396) на 2022–2026 рр. та КПКВК 6541230 за програмно-цільовою конкурсною тематикою «Фізичне підґрунтя розробки матеріалів задля еластокалоричного охолодження (ЕЛАСТ)» (державний реєстраційний № 0122U001169) на 2022–2023 рр.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА—REFERENCES

1. Fakher F. Assaad and Igor F. Herbut, *Phys. Rev. X*, **3**, Iss. 3, Article number: 0310102013 (2013).
2. Z. Y. Meng, T. C. Lang, S. Wessel, F. F. Assaad, and A. Muramatsu, *Nature (London)*, **464**: 847 (2010).
3. S. Sorella, Y. Otsuka, and S. Yunoki, *Sci. Rep.*, **2**, Article number: 992 (2012).
4. S. Sorella and E. Tosatti, *Europhys. Lett.*, **19**, No. 8: 699 (1992).
5. T. Paiva, R. T. Scalettar, W. Zheng, R. R. P. Singh, and J. Oitmaa, *Phys. Rev. B*, **72**, Iss. 8: Article number: 085123 (2005).
6. Igor F. Herbut and Masaki Oshikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, Article number: 146401 (2006).
7. Lufeng Zhang, Chi Ma, and Tianxing Ma, *Phys. Status Solidi*, **15**, Iss. 9, Article number: 2100287 (2021).
8. S.-P. Shen, J.-C. Wu, J.-D. Song, X.-F. Sun, Y.-F. Yang, Y.-Sh. Chai, D.-Sh. Shang, Sh.-G. Wang, J. F. Scott, and Young Sun, *Nat. Commun.*, **7**, Article number: 10569 (2016).
9. I. N. Karnaukhov, *Ann. Phys.*, **433**, Article number: 168308 (2020).
10. I. N. Karnaukhov, *Sci. Rep.*, **11**, Article number: 5842 (2021).
11. Ming-Huan Zeng, Tianxing Ma, and Y.-J. Wang, *Phys. Rev. B*, **105**, 035155 (2022).
12. D. P. Arovas, E. Berg, S. A. Kivelson, and S. Raghu, *Annu. Rev. Condensed Matter Phys.*, **13**, 239 (2022).
13. I. N. Karnaukhov, *Annals of Physics*, **434**, 168637 (2021).
14. M. Cyrot, *J. Phys. (Paris)*, **33**, No. 1: 125 (1972).
15. Kuang-Ting Chen and Yu-Ju Chiu, *Spinless Fermions with Repulsive*

- Interactions* (Cambridge: MIT, 2010).
16. T. Yoshioka, A. Koga, and N. Kawakami, *Phys. Rev. Lett.*, **103**, Article number: [036401 \(2009\)](#).
 17. J. Kokalj and R. H. McKenzie, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, Article number 206402 (2013).