Metallophysics and Advanced Technologies
Металофіз. новітні технол.
Metallofiz. Noveishie Tekhnol.
2022, vol. 44, No. 10, pp. 1335–1346
https://doi.org/10.15407/mfint.44.10.1335
Reprints available directly from the publisher

PACS numbers: 02.30.Jr, 05.65.+b, 61.72.Bb, 61.72.Cc, 61.72.jd

Утворення впорядкованих структур з вакансій у двовимірній прямокутній пластині

О. Е. Засимчук, В. І. Засимчук, О. С. Гаценко

Інститут металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України,
бульв. Академіка Вернадського, 36,
03142 Київ, Україна

Вивчено умови виникнення впорядкованого розподілу концентрації вакансій у двовимірній прямокутній пластині. Проаналізовано відповідне рівняння для стаціонарного випадку. Функція $S(x, y)$ описує взаємодію між вакансіями; у роботі знайдено явний вираз для $S(x, y)$. Показано, що за сталої по поверхні пластини температури самоорганізація (виникнення впорядкованого розподілу) може відбуватися лише у дуже малій пластині. За наявности функціональної залежности температури від координат пластини можливе утворення складної залежности густини вакансій від координат макроскопічної пластини.

Ключові слова: самоорганізація, вакансії, впорядковані розв'язки, межові умови, власні значення, власні функції.

The conditions of vacancies'-concentration ordered-distribution formation inside the two-dimensional rectangular plate are considered. Corresponding equation for the stationary case is analysed. The interaction between vacancies is described by the function $S(x, y)$; in the work, evident expression for $S(x, y)$ is found. As shown, for the constant temperature on a surface plate, self-organization (ordered-distribution formation) can take place only inside the very little plate. It is possible the onset of complicated dependence of vacancies' density on the co-ordinates within the big plate, if there is a func-

Corresponding author: O. S. Gatsenko
E-mail: gats@imp.kiev.ua

G. V. Kurdyumov Institute for Metal Physics, N.A.S. of Ukraine,
36 Academician Vernadsky Blvd., UA-03142 Kyiv, Ukraine

Citation: O. Eh. Zasimchuk, V. I. Zasimchuk, and O. S. Gatsenko, Formation of Ordered Structure from the Vacancies at a Two-Dimensional Rectangular Plate, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **44**, No. 10: 1335–1346 (2022) (in Ukrainian). DOI: 10.15407/mfint.44.10.1335

tional dependence of temperature on the plate co-ordinates.

Key words: self-organization, vacancies, ordered solutions, boundary conditions, eigenvalues, eigenfunctions.

(Отримано 8 травня 2022 р.; остаточний варіянт — 19 липня 2022 р.)

1. ВСТУП

Питаннями самоорганізації займалися у багатьох роботах, наприклад [1–3], але не завжди вдається відтворити цей процес у експерименті. У нашій попередній роботі було висловлено припущення, що самоорганізація іде лише за деяких дискретних значень параметрів. Були одержані рівняння, впорядковані розв'язки яких існують лише за таких значень параметрів. Подібні задачі відомі у математичній фізиці як задачі на власні значення [4]. Їх можна розглядати для будь-якого лінійного оператора M, наприклад: а) матриці, б) диференційного оператора, в) інтеґрального оператора і т.д. Ми будемо розглядати випадок (б). Основне рівняння має вигляд

$$Mv = \beta v, \tag{A}$$

де v — невідома функція параметрів системи, яку ми розглядаємо, β — число, яке необхідно визначити. Значення β, для яких існують нетривіяльні розв'язки v рівняння (A) звуться власними числами (в.ч.) рівняння (A), а самі нетривіяльні розв'язки v — власними функціями (в.ф.). Звісно, для розв'язання нашої задачі (на власні значення у випадку б), треба вказати області варіяції змінних і межові умови, а сама задача має бути однорідною.

Відмітимо наступні властивості задач на власні значення.

1. Власні функції визначені тільки з точністю до довільного постійного множника.

2. Якщо β дорівнює власному значенню, то відповідна неоднорідна задача не має розв'язку.

3. $\int_w v_i^*(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0$ за невиконання умови $i = j$ (w — область варіяції змінних).

Довільну функцію v можна записати як лінійну комбінацію власних функцій.

У нашій роботі задачі на власні значення розглядаються далі: а) (46) з межовими умовами (49) ($0 \le r \le 1$); б) у п. 2.1 задача (58) в області варіяції (84) з межовими умовами (85).

Коли на зразок діє сильне механічне навантаження, параметри системи весь час змінюються, поки не стають власними числами рівнянь, що цю систему описують. Тоді, наприклад, концентрації вакансій починають розподілятися впорядковано в залежності від координат зразку. Якщо за час, поки таке становище продовжується, встигають утворитися гідродинамічні канали, можна вважати, що відбулася самоорганізація.

В наших попередніх роботах, присвячених питанням самоорганізації вакансій за пластичної деформації матеріялів, було показано, що процес самоорганізації може відбуватися лише за деяких фіксованих значень параметрів системи. Але в цих дослідженнях не бралося до уваги той факт, що пластична деформація завжди супроводжується зміною температури в локальних ділянках досліджуваного зразка, що створює ґрадієнт температур в усьому об'ємі. Врахування цього процесу в розрахунках відрізняє дану статтю від попередніх досліджень.

2. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

Розглянемо двовимірну прямокутню пластину довжиною $2L$ і шириною $2L_y$. Аналогічно [5], запишемо рівняння для розподілу густини вакансій $n(\mathbf{r})$ в цій пластині для стаціонарного випадку:

$$\left(K - n(\mathbf{r}) / \tau\right) / D_v + \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}n(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r})\mathrm{grad}S\right) = 0. \qquad (1)$$

Тут всі означення такі, як у роботі [5], за винятком

$$S = (1 / k_B T)\int_\Omega E(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1, \qquad (2)$$

де $E(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ — зведена енергія парної взаємодії вакансій. Ми припускаємо, що E має вигляд

$$E(R) = d / R^3 - a / R^4 + b / R^8. \qquad (3)$$

Тут R — віддаль між двома взаємодійними вакансіями:

$$R = \left((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right)^{1/2}, \qquad (4)$$

$$a = A / (k_B T),\ b = B / (k_B T),\ d = D / (k_B T), \qquad (5)$$

A, B і D — позитивні константи. Шукаємо розв'язок $n(\mathbf{r})$ у вигляді ряду:

$$n = n_0 + hf(\mathbf{r}) + O(h^2), \qquad (6)$$

$$|h| << 1. \qquad (7)$$

Припускаємо коефіцієнт дифузії D_v достатньо малою величиною, так що з (1)

$$n_0 \approx K\tau. \tag{8}$$

Шукаємо, за яких умов f буде впорядкованою осцилівною функцією. Для цього прирівняємо коефіцієнти при h. Одержимо:

$$\Delta f + S_x f_x + S_y f_y + S_z f_z + (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} - 1 / (\tau D_v))f + \Delta S_b = 0, \tag{9}$$

$$S_x = \partial S / \partial x, \quad f_y = \partial f / \partial y \tag{10}$$

і т.д.

$$S_b = \int_\Omega E(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \tag{11}$$

Припускаємо, що $n_0 = 1$, $L_y = L$,

$$S_p = \int_{-L_y}^{L_y} I dy_1, \tag{12}$$

$$I = \int_{-L}^{L} dx_1 / \left((x - x_1)^2 + a_1^2\right)^p, \tag{13}$$

$$a_1^2 = (y - y_1)^2. \tag{14}$$

Ми не можемо знайти I, але можемо знайти $dI / dx = I_x$:

$$dI / dx = I_x \approx -4pLx / (L^2 + x^2 + a_1^2)^{p+1}. \tag{15}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} S_{pxy} &= 16p(p+1)LL_y xy / (L^2 + L_y^2 + x^2 + y^2)^{p+2} = \\ &= Cxy(1 + O((x^2 + y^2) / (L^2 + L_y^2))) \approx Cxy, \end{aligned} \tag{16}$$

де $C > 0$, $S_{pxy} = \partial^2 S_p / \partial x \partial y$.

Інтеґруємо

$$S_{px} = \int S_{pxy} dy \approx Cxy^2 / 2 + F_1(x), \tag{17}$$

$$S_p = \int S_{px} dx \approx Cx^2 y^2 / 4 + \int F_1(x) dx + C_1. \tag{18}$$

Аналогічно,

$$S_p \approx Cx^2 y^2 / 4 + \int F_2(y) dy + C_2, \tag{19}$$

$$\int F_1(x) dx = \int F_2(y) dy + C_3. \tag{20}$$

Таким чином,

$$F_1(x) = F_2(y) = 0, \tag{21}$$

$$S_p = Cx^2y^2 / 4 + C_0. \tag{22}$$

З (2), (3) та (4)

$$C_0 \approx 4 \int_{x+\xi}^{x} dx_1 \int_{y+\xi}^{y} dy_1 / ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^p = \infty. \tag{23}$$

Умова $C_0 = \infty$ практично не виконується, оскільки вакансії не можуть наближатися одна до одної на віддаль менше якогось ρ; C_0 — це просто якесь дуже велике число.

$$S = dS_{1,5} - aS_2 + bS_4. \tag{24}$$

Якщо температура T не залежить від x і y (див. (5)), ми маємо

$$S = Ax^2y^2 + A_0, \tag{25}$$

$$A_0 >> 1. \tag{26}$$

Визначимо

$$S_{pb} = \int_{x+\xi}^{x} dx_1 \int_{y+\xi}^{y} dy_1 f(x_1, y_1) / ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^p \approx C_0 f(x, y). \tag{27}$$

Далі скористаємося (24). Знехтуємо іншими членами у (11) і з (9), нехтуючи членом $1 / (\tau D_v)$, одержимо рівняння

$$A_1 \Delta f + 2A\left(\left(xy^2 f_x + x^2 y f_y\right) + (y^2 + x^2) f\right) = 0. \tag{28}$$

Тут

$$A_1 = A_0 + 1 \tag{29}$$

(щодо A_0, A див. (25), (26)). За макроскопічних розмірів пластини

$$A_1 >> A, \tag{30}$$

і ніякої самоорганізації бути не може.

Розглянемо, що відбуватиметься за дуже малих L і L_y. Як видно з (16), основний внесок у суму (24) вносить складова в S_4. По ній і вестимемо розрахунок. Введемо нові змінні

$$u = x / L, \quad v = y / L_y. \tag{31}$$

Тоді

$$-1 \le u \le 1,\ -1 \le v \le 1. \tag{32}$$

Означимо

$$L_y^2 / L^2 = q. \tag{33}$$

Припускаємо

$$L_y \cong L. \tag{34}$$

Тоді з (28) одержимо рівняння

$$(f_{uu} + q^{-1} f_{vv}) + D((quv^2 f_u + u^2 v f_v) + (u^2 + qv^2) f) = 0, \tag{35}$$

$$f_u = \partial f / \partial u \text{ і т.д.}, \tag{36}$$

$$D \cong 1 / (A_1 L^6) > 0. \tag{37}$$

Таким чином, за малих L, D не є малим. Видно, що самоорганізація за постійної температури може відбуватися лише у малих пластинах.

Введемо тепер полярні координати:

$$u = r\cos\phi,\ v = r\sin\phi. \tag{38}$$

Підставляємо у (35), припускаючи, що

$$q = L_y^2 / L^2 = 1, \tag{39}$$

$$f_{rr} + r^{-1} f_r + r^{-2} f_{\phi\phi} + D(f_1 + r^2 f) = 0, \tag{40}$$

$$f_1 = r^3 (\cos\phi \sin^2\phi f_u + \sin\phi \cos^2\phi f_v). \tag{41}$$

Ми бачимо, що в околах $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, $f_1 \to 0$ і нею можна знехтувати. Одержимо рівняння

$$r^2 f_{rr} + r f_r + f_{\phi\phi} + D r^4 f = 0. \tag{42}$$

Шукаємо f у вигляді

$$f = R(r)\varphi(\phi). \tag{43}$$

Розділимо (42) на (43). Одержимо

$$(r^2 R_{rr} + r R_r) / R + D r^4 = -\varphi_{\phi\phi} / \varphi = C, \tag{44}$$

$$\varphi_{\phi\phi} + C\varphi = 0,\ \ \varphi = \cos(C^{1/2}\phi),\ \ C = n^2, \tag{45}$$

де n — ціле число та 0. Тоді з (44) маємо

$$r^2 R_{rr} + rR_r + (Dr^4 - n^2)R = 0. \tag{46}$$

Це рівняння можна знайти у [6] (с. 401, п. 2.162). Його розв'язок має вигляд:

$$R(r) = Z_{n/2}(0,5D^{1/2}r^2). \tag{47}$$

Поведінку $Z_q(z)$ описано у [7] (21.8-4–21.8-31). Як відомо,

$$Z_q(z) = a_1 J_q(z) + b_1 N_q(z) \tag{48}$$

(див. [7], 21.8-8), де $J_q(z)$ — Бесселева функція, $N_q(z)$ — Нейманова функція, a_1, b_1 — деякі константи. Шукаємо їх з межових умов

$$R_{|\,r=1} = 0. \tag{49}$$

Тоді з (47), (48)

$$b_1 = -a_1 J_{n/2}(0,5D^{1/2}) \,/\, N_{n/2}(0,5D^{1/2}). \tag{50}$$

Оскільки кожна Нейманова функція N_q має особливість при $r \to 0$ (див. [7], рис. 21.8-1), невиконання умови

$$b_1 = 0 \tag{51}$$

означає, що в околі $r \to 0$ існує велике скупчення вакансій, тобто тріщина. Для об'єкту, в якому тріщини немає, має виконуватися умова (див. (50)):

$$J_{n/2}(0,5D^{1/2}) = 0, \tag{52}$$

тобто самоорганізація може відбуватися лише за деяких дискретних значень D (див. 21.8-11–21.8-13 [7] або рис. 7.1 [4]). Параметер D пов'язаний із розміром зразка L (див. (37)). Тому самоорганізація може відбуватися лише за деяких дискретних малих розмірів пластини.

2.1. Самоорганізація в умовах залежности температури у зразку від u та v

Нехай

$$1 / T = C_3 \exp((\xi u^2 + \gamma v^2) / 2). \tag{53}$$

Тоді з (5), (24) і (25), нехтуючи меншими членами (ми припускаємо, що наш об'єкт вже є макроскопічним), маємо

$$S_u = \left(\xi u + \ldots\right) S, \tag{54}$$

$$S_{uu} = \left(\xi + \xi^2 u^2 + \ldots\right) S, \tag{55}$$

$$S_v = \left(\gamma v + \ldots\right) S, \tag{56}$$

$$S_{vv} = \left(\gamma + \gamma^2 v^2 + \ldots\right) S. \tag{57}$$

Підставляючи (54)–(57) у (9), одержимо

$$f_{uu} + f_{vv} + \xi u f_u + \gamma v f_v + ((\xi + \gamma) + (\xi^2 u^2 + \gamma^2 v^2)) f = 0. \tag{58}$$

Шукаємо $f(u, v)$ у вигляді

$$f(u, v) = F(u) G(v). \tag{59}$$

Нехай

$$\xi + \gamma = u_0 + v_0 = \alpha, \tag{60}$$

де u_0, v_0 не залежать від u і v. Розділимо (58) на $f(u, v)$ (див. (59)); одержимо

$$(F_{uu} + \xi u F_u)/F + u_0 + \xi^2 u^2 = -(G_{vv} + \gamma v G_v)/G - v_0 - \gamma^2 v^2 = C = \mathrm{const}. \tag{61}$$

Нехай

$$C \geq 0. \tag{62}$$

Тоді маємо

$$F_{uu} + \xi u F_u + \left((u_0 - C) + \xi^2 u^2\right) F = 0, \tag{63a}$$

$$G_{vv} + \gamma v G_v + \left((v_0 + C) + \gamma^2 v^2\right) G = 0, \tag{63$б$}$$

$$F = C_1 g(u) \exp\left(-\int r(u) du\right), \tag{64}$$

$$r(u) = \xi u / 2, \tag{65}$$

$$\phi(u) = (2u_0 - 2C - \xi) / 2 + 3\xi^2 u^2 / 4. \tag{66}$$

З (63*а*) ми маємо рівняння

$$g_{uu} + \phi(u) g = 0. \tag{67}$$

Щоб розв'язок був всюди осцилівним, з урахуванням (62) має виконуватися умова

$$0 \le C \le u_0 - \xi / 2,\ u_0 \ge \xi / 2. \tag{68}$$

Аналогічно, з (63*б*) маємо

$$G = C_2 H(v)\exp\left(-\int(\gamma v / 2)dv\right). \tag{69}$$

Для $H(v)$ маємо рівняння

$$H_{vv} + \phi_1(v)H = 0, \tag{70}$$

$$\phi_1(v) = (v_0 + C - \gamma / 2) + 3\gamma^2 v^2 / 4. \tag{71}$$

Щоб розв'язок був всюди осцилівним, з урахуванням (62) має виконуватися умова

$$v_0 \ge \gamma / 2. \tag{72}$$

Таким чином, з (68), (72), (60) і (58)

$$(\xi + \gamma) / 2 \le u_0 + v_0 = \xi + \gamma, \tag{73}$$

$$\xi / 2 \le u_0 \le \xi + \gamma / 2;\ v_0 = \xi + \gamma - u_0, \tag{74}$$

тобто u_0, а відповідно, і v_0 можуть змінюватися за постійних ξ та γ, і для (58) маємо цілий пакет розв'язків, з яких можна побудувати практично будь-яку форму.

Розв'яжемо (67) методою ВКБ [4]. Нехай

$$C = 0. \tag{75}$$

З (66)

$$\phi(u) = 3\xi^2(u^2 + a_k^2) / 4, \tag{76}$$

$$a_k^2 = (4u_0 - 2\xi) / 3\xi^2. \tag{77}$$

З [8] (с. 89, 1.2.41.8) маємо

$$\psi(u) = \int(\phi(u))^{1/2}du = \frac{\sqrt{3}\xi}{4}\left(u(u^2 + a_k^2)^{1/2} + a_k^2 \ln\left|\frac{(u + (u^2 + a_k^2)^{1/2})}{a_k}\right|\right). \tag{78}$$

Тоді розв'язок (63*а*) має вигляд

$$F(u) = C_1 \exp(-\xi u^2 / 4)\sin\psi / \xi^{1/2}(u^2 + a_k^2)^{1/4}. \tag{79}$$

Аналогічно, знайдемо розв'язок (63*б*). Визначимо

$$b_k^2 = (4v_0 - 2\gamma) / 3\gamma^2. \tag{80}$$

Тоді з (71)

$$\phi_1(v) = 3\gamma^2(v^2 + b_k^2) / 4, \tag{81}$$

$$\psi_1(v) = \int(\phi_1(v))^{1/2}dv = \frac{\sqrt{3}\gamma}{4}(v(v^2 + b_k^2)^{1/2} + b_k^2\ln\left|\frac{(v + (v^2 + b_k^2)^{1/2})}{b_k}\right|), \tag{82}$$

Таким чином,

$$G(v) = \exp(-\gamma v^2 / 4)\sin(\psi_1(v)) / \gamma^{1/2}(v^2 + b_k^2)^{1/4}. \tag{83}$$

Як видно з (63*а*) і (63*б*), $F(u)$ і $G(v)$ можуть бути парною чи непарною функцією по u і v відповідно. Тому, як видно з (32), достатньо розглянути їх на інтервалах

$$0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1. \tag{84}$$

З умови

$$F_{|\,u=1} = 0,\ G_{|\,v=1} = 0 \tag{85}$$

маємо

$$\psi_{|u=1} = \pi j,\ \psi_{1\,|\,v=1} = \pi m, \tag{86}$$

де j, m — натуральні числа.

З рівнянь (86) можна знайти u_0 і v_0. Видно, що за впорядкованого розподілу вакансій u_0 і v_0 можуть набувати лише дискретних значень.

Таким чином, як видно з (60), впорядкований розподіл вакансій може існувати лише за деяких дискретних $\alpha = u_0 + v_0$, а задача (58) — це задача на власні значення.

3. ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ І ВИСНОВКИ

У роботі одержано формули для стаціонарних станів впорядкованого розподілу концентрації вакансій у двовимірній прямокутній пластині. Залишається відкритим питання, як утворилися ці стаціонарні стани.

Моделювання методою молекулярної динаміки пластичної деформації ГЦК-нанокристалів [9] показало, що ці стани у бездефектному нанокристалі утворюються за дуже малий час ($\cong 10^{-12}$ с), але фізичний механізм цього процесу досі невідомий. Є припущення, що цей процес пов'язаний з незначними відхилами атомів у місцях локалізації внутрішніх напруг, що сприяє виникненню так званих атом-вакансійних станів [10].

Показано, що за постійної по координатах пластини температури самоорганізація може відбуватися лише за дуже малих розмірів пластини. Наприклад, вона може відбуватися за якихось малих дискретних розмірів пластини L, що задаються формулами (50), (51) (D пов'язано з L формулою (37)).

Якщо температура змінюється вздовж координат пластини за законом (53), то, як було показано у нашій роботі, можуть існувати впорядковані розподіли вакансій достатньо складної форми на великій площі, тобто розміри пластини вже можуть бути макроскопічними. Це буде відбуватися лише за якихось дискретних значень параметрів системи (власних значень) [4]. Однак, за законами лінійної термодинаміки температура у зразку з часом має вирівнюватися, і стаціонарним описаний вище стан буде тільки у випадку, якщо подавати тепло у пластину ззовні.

У іншому випадку, поки існує розподіл температури (53), система встигає перейти у ще один стаціонарний впорядкований стан, і, наприклад, з'являються гідродинамічні канали.

Слід відмітити, що взагалі-то вакансії з двовимірної пластини мають перейти в оточувальне середовище. Але пластина може бути покрита окисною плівкою, і тоді таке не відбудеться.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах* (Москва: Мир: 1979).
2. П. Гленсдорф, И. Пригожин, *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций* (Москва: Мир: 1973).
3. В. Эбелинг, *Образование структур при необратимых процессах* (Москва: Мир: 1979).
4. Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, *Математические методы физики* (Москва: Атомиздат: 1972).
5. О. В. Олійник, В. А.Татаренко, *Доповіді Національної академії наук України*, № 3: 55 (2019).
6. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (Москва: Наука: 1976).
7. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Москва: Наука: 1978).
8. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды* (Москва: Наука: 1981).
9. О. Е. Засимчук, В. І. Засимчук, Т. В. Турчак, О. С. Гаценко, О. І. Баскова, *Металофіз. новітні технол.*, **42**, № 2: 281 (2020).
10. В. Е. Панин, В. Е. Егорушкин, Ю. А. Хон, Т. Ф. Елсукова, *Изв. вузов. Физика*, **25**, № 12: 5 (1982).

REFERENCES

1. G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium Systems. From Dissipative Structures to Order through Fluctuations* (New York: Wiley: 1977).
2. P. Glansdorff and I. Prigogine, *Termodinamicheskaya Teoriya Struktury, Ustoychivosti i Fluktuatsiy* [Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations] (Moscow: Mir: 1973) (Russian translation).
3. W. Ebeling, *Strukturbildung Bei Irreversiblen Prozessen: Eine Einfu Ehrung in die Theorie Dissipativer Strukturen* (Teubner: 1966) (in German).
4. J. Mathews and R. L. Walker, *Matematicheskie Metody Fiziki* [Mathematical Methods in Physics] (Moscow: Atomizdat: 1972) (Russian translation).
5. O. V. Oliinyk and V. A. Tatarenko, *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3: 55 (2019) (in Ukrainian).
6. E. Kamke, *Spravochnik po Obyknovennym Differentsialnym Uravneniyam* (Moscow: Nauka: 1976) (Russian translation).
7. G. A. Korn and Th. M. Korn, *Spravochnik po Matematike dlya Nauchnykh Rabotnikov i Inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers] (Moscow: Nauka: 1978) (Russian translation).
8. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integraly i Ryady* (Moscow: Nauka: 1981) (in Russian).
9. E. E. Zasimchuk, V. I. Zasimchuk, T. V. Turchak, O. S. Gatsenko, and O. I. Baskova, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **42**, No. 2: 281 (2020) (in Ukrainian).
10. V. E. Panin, V. E. Yegorushkin, Yu. A. Hon, and T. F. Yelsukova, *Izvestiya Vuzov. Fizika*, **25**, No. 12: 5 (1982) (in Russian).